

Публичное акционерное общество «Газпром»

Автономная некоммерческая организация Высшего образования «Университет Иннополис»

УДК  
№ Госрегистрации  
Инв. №

АНО ВО «Университет Иннополис»  
517.958:539.3  
№ 2018.3

СОГЛАСОВАНО

УТВЕРЖДАЮ

Член Правления ПАО «Газпром»  
начальник Департамента

Генеральный директор  
АНО ВО «Университет Иннополис»

\_\_\_\_\_ **В. В. Черепанов**

\_\_\_\_\_ **К.В. Семенихин**

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

ОТЧЕТ

о научно-исследовательской работе

№, дата договора	№ 6112-307-17-5 от 10.10.2017
Наименование договора	Договор № 6112-307-17-5 от 10.10.2017 на выполнение опытно-конструкторских и технологических работ
№, наименование этапа	Этап 1. Разработка и математическое обоснование высокоточных вычислительных методов для численного решения 1D и 3D задач геомеханического моделирования Часть 3. Разработка расчетного модуля для численного решения 1D и 3D задач геомеханического моделирования
Наименование результата	Отчет о НИР «Разработка расчетного модуля для численного решения 1D и 3D задач геомеханического моделирования»

Руководитель НИР по договору

Е. В. Данилов

Иннополис,  
2018

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Старший научный сотрудник \_\_\_\_\_ Наумчев А.В.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Старший научный сотрудник,  
кандидат технических наук \_\_\_\_\_ Ульянов В.Н.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Старший инженер-исследователь,  
кандидат технических наук \_\_\_\_\_ Буйвал А.К.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Старший инженер-исследователь \_\_\_\_\_ Шимчик И.А.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Старший научный сотрудник,  
кандидат технических наук \_\_\_\_\_ Федоренко Р.В.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Инженер-исследователь \_\_\_\_\_ Иванов М.А.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Научный сотрудник \_\_\_\_\_ Хусаинов Р. Р.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Младший инженер-исследователь \_\_\_\_\_ Мамедов Ш.Н.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Младший инженер-исследователь \_\_\_\_\_ Зубов И.Н.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Младший научный сотрудник \_\_\_\_\_ Хазеев М. Р.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Младший научный сотрудник \_\_\_\_\_ Ибрагимов М.К.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Младший научный сотрудник \_\_\_\_\_ Габдуллин А.Р.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Младший научный сотрудник,  
кандидат технических наук \_\_\_\_\_ Костенко К.В.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Младший научный сотрудник	_____ Попов Д.И. «__» _____ 2018 г.
Младший научный сотрудник	_____ Ягфаров Р.Р. «__» _____ 2018 г.
Младший научный сотрудник, кандидат технических наук	_____ Федоренко А.А. «__» _____ 2018 г.
Программист С++, кандидат технических наук	_____ Чайников С.В. «__» _____ 2018 г.
Программист 1 категории	_____ Крутиков А.А. «__» _____ 2018 г.
Программист 3 категории	_____ Ригина Р.Ф. «__» _____ 2018 г.
Нормоконтролер	_____ Есина О.Ю. «__» _____ 2018 г.

## РЕФЕРАТ

Отчет 66 страницы, 14 рисунков, 16 использованных источников.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** ЗАДАЧИ ГЕОМЕХАНИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ, ВЫСОКОТОЧНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ, КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА, СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, ГЕОФИЗИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СКВАЖИН, ГОРНАЯ ПОРОДА, УПРУГО-ПРОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА, НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ, УСТОЙЧИВОСТЬ СТВОЛА СКВАЖИНЫ.

Объектом исследования являются варианты реализации высокоточных численных методов решения 1D и 3D задач геомеханического моделирования.

Целью работы является разработка набора высокоточных алгоритмов для обозначенного круга задач геомеханики.

В рамках работы проводятся сравнение различных реализаций расчетных алгоритмов, анализ их вычислительной сложности, возможности распараллеливания, соответствия математическому обоснованию, изложенному в Части 2 отчета о НИР «Разработка и математическое обоснование высокоточных вычислительных методов для численного решения 1D и 3D задач геомеханического моделирования». В результате работы описываются оптимальные алгоритмы и особенности их реализации.

Областью применения результатов работ являются разрабатываемые программные системы 1D и 3D геомеханического моделирования.

Работа имеет высокую значимость для увеличения объемов внедрения численного геомеханического моделирования в работы отечественных нефтесервисных компаний и повышения независимости от технологий зарубежных программных продуктов.

Дальнейшее развитие работы должно вестись в направлении увеличения количества учитываемых особенностей при моделировании коллекторов и своевременного обновления результатов относительно развития современных вычислительных средств.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	<b>9</b>
1.1 Структура ПО .....	10
1.2 Схема решения задач геомеханического моделирования .....	11
1.3 Схема функционирования расчетного модуля для решения задачи геомеханического моделирования .....	14
1.4 Структура хранения данных .....	18
2.1 Схема решения задачи .....	22
2.2 Расчет упруго-прочностных свойств.....	22
2.2.1 Типы входных данных .....	22
2.2.2 Стохастический метод решения поиска и оценки корреляционных зависимостей.....	22
2.2.3 Детерминистический метод расчета зависимостей.....	32
2.3 Расчет вертикального напряжения .....	32
2.4 Расчет порового давления .....	33
2.4.1 Оптимизационный алгоритм Нелдера-Мида.....	34
2.5 Расчет градиентов горизонтальных напряжений.....	35
2.6 Расчет устойчивости .....	35
2.7 Анализ устойчивости стенок скважины в зависимости от траектории.....	38
2.8 Расчет пескопроявления .....	39
2.9 Анализ стабильности трещин и разломов .....	40
3.1 Создание базовой геомеханической сетки .....	41
3.2 Построение геомеханической сетки.....	42
3.3 Создание материалов .....	42
3.4 Заполнение геомеханической сетки материалами .....	42
3.5 Задание модели разрывов .....	43
3.6 Задание температур и давлений для геомеханической сетки.....	43

3.7	Определение граничных условий для геомеханической сетки .....	43
3.8	Расчет напряженно-деформированного состояния среды .....	45
3.8.1	<i>Входные данные</i> .....	45
3.8.2	<i>Выходные данные</i> .....	45
3.8.3	<i>Общая схема решения</i> .....	46
3.8.4	<i>Расчетная конечно-разностная 3D схема</i> .....	50
3.8.5	<i>Распараллеливание расчетного алгоритма</i> .....	60
3.9	Ремасштабирование (Upscaling) .....	62
	<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	<b>63</b>
	<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ</b> .....	<b>65</b>

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В настоящем отчете о НИР применяют следующие термины с соответствующими определениями:

Логарифмическое правдоподобие – монотонно увеличивающаяся статистическая величина.

## **ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ**

В настоящем отчете о НИР применяются следующие сокращения с соответствующими определениями:

ГУ – граничные условия;

КНП – алгоритм кратчайшего наименьшего пути;

NIPALS – рекуррентный алгоритм;

ПО – программное обеспечение;

РСА – метод главных компонент.

## ВВЕДЕНИЕ

В первой части отчета «Разработка и математическое обоснование высокоточных вычислительных методов для численного решения 1D и 3D задач геомеханического моделирования» было представлено математическое обоснование требуемых вычислительных методов для решения геомеханических задач в одномерной и трехмерной постановке при разработке нефтегазовых месторождений. В данной части исследуются методы реализации обозначенного круга задач. Учитывается необходимость соответствия предлагаемых решений современным мировым наработкам в этой области разработки численных схем. Особое внимание уделяется балансу между вычислительной сложностью и точностью решения разрабатываемых численных схем.

В рамках работы решается задача получения точного решения при минимальных объемах входных данных, и, напротив, задача учёта максимального покрывающего множества входных данных при небольших временах расчёта. Достижение этих характеристик позволит создать программные продукты с конкурентоспособными свойствами в вычислительном плане.

В работе предложены способы реализации численного решения интегральных и дифференциальных уравнений и систем уравнений, оптимизационных алгоритмов. Выделены особенности реализации многоскважинного режима. Задачи для 1D и 3D моделирования рассматриваются соответственно в разделах 1 и 2 работы.

Данный отчет о НИР является заключительным, ему предшествовали два промежуточных отчета:

- часть 1 «Анализ мирового опыта и постановка задач для 1D и 3D геомеханического моделирования»;
- часть 2 «Разработка и математическое обоснование высокоточных вычислительных методов для численного решения 1D и 3D задач геомеханического моделирования».

# 1 Организация ПО для расчетного модуля

## 1.1 Структура ПО для расчетного модуля

Для реализации расчетного модуля необходимо иметь представление о верхнеуровневой структуре типичного программного средства, которое может включать в себя такой модуль. Требования к типичному модулю исходят из анализа современных потребностей, которые состоят из необходимости наличия следующих пунктов:

- взаимозаменяемые расчетные модули;
- плагинная архитектура для независимого расширения функционала;
- возможность проведения расчетов на удаленной машине, не блокирующих работу основного приложения.

Исходя из предложенных требований была составлена типичная схема ПО для интеграции расчетного модуля.

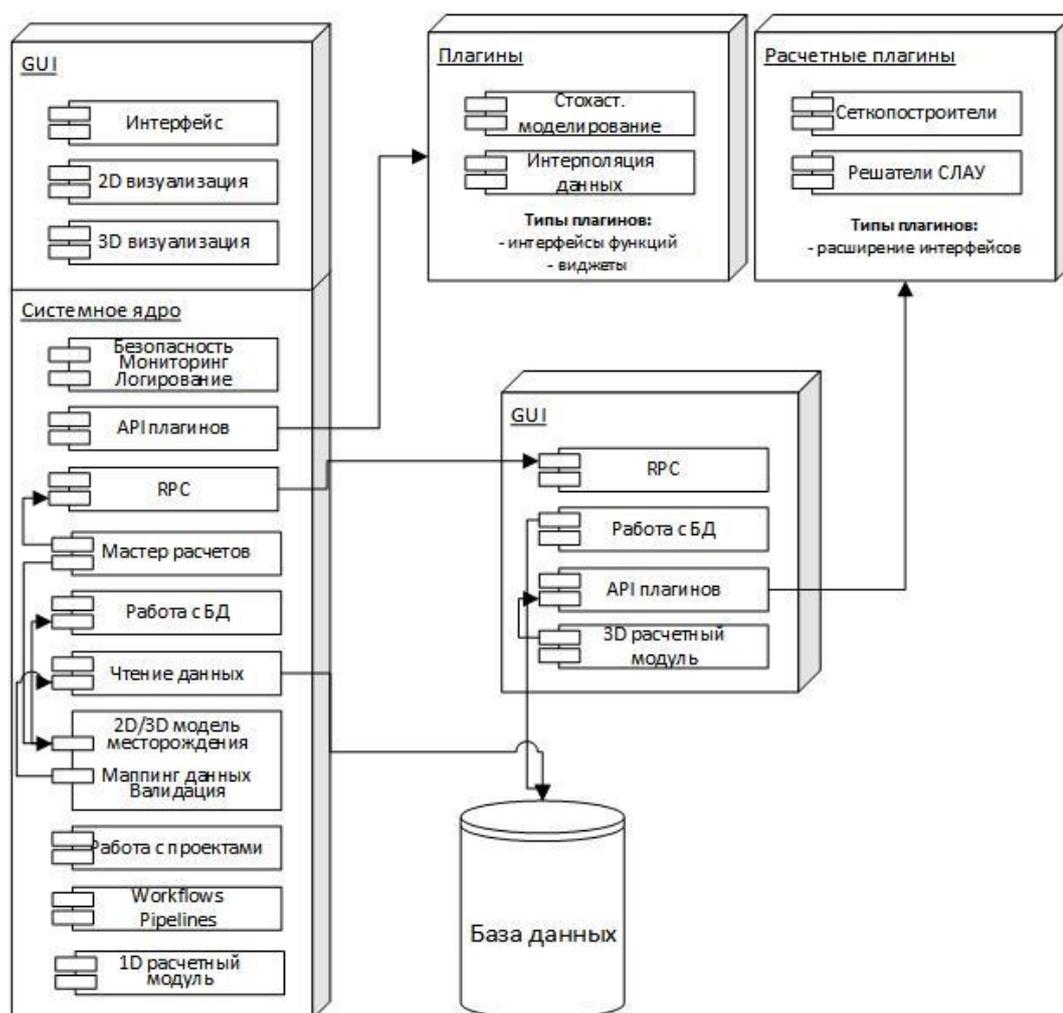


Рисунок 1 – Схема ПО для расчетного модуля

ПО должно состоять из нескольких функционально разграниченных сущностей:

- системное ядро – основной модуль, который агрегирует общую логику работы программы путем обеспечения взаимодействия других блоков;
- GUI – модуль работы с графическим пользовательским элементов, включая 2D и 3D графические компоненты;
- плагины и расчетные плагины – модули, отвечающие за интеграцию плагинов;
- расчетное ядро – модуль работы с расчетными процедурами из расчетных плагинов;
- база данных – хранилище данных проекта.

Связь между системным ядром и расчетным ядром осуществляется путем вызова удаленных процедур (RPC) и обменом данных через базу данных. База данных должна содержать объекты для работы с трехмерными и одномерными задачами.

Единое API для расчетных плагинов позволит подменять различные расчетные модули не меняя ядро программы. Это позволит выбирать расчетный модуль в зависимости от целей решаемой задачи. При решении задачи моделирования напряженно-деформированного состояния можно будет выбрать одно- или двухсвязную постановку, или выбрать симулятор, работающий с использованием или без видеокарты.

## 1.2 Схема решения задач геомеханического моделирования

По результатам первого и второго этапа работ данной НИР можно составить общую схему решения геомеханической задачи, которая разбивается на три этапа:

- а) Блок А.** Загрузка и анализ имеющихся данных по исследуемому объекту, включая результаты обработки сейсмических данных и данные по имеющимся скважинам.

В этом этапе уточняются цели и задачи моделирования и решаются одномерные задачи. Результатом этого этапа являются распределения механических и гидродинамических свойств вдоль траекторий скважин, точечные замеры поровых давлений и температур.

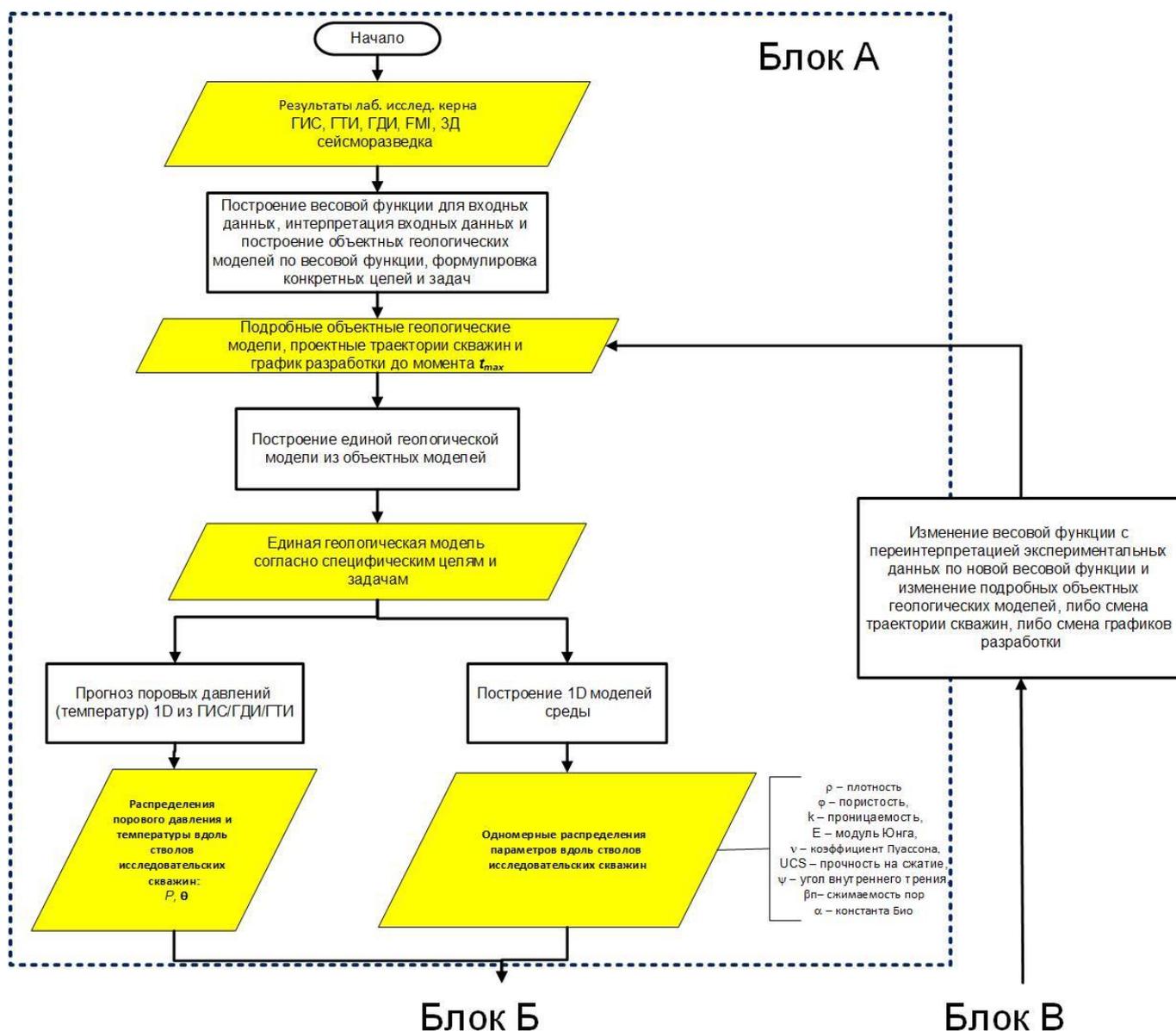


Рисунок 2 – Схема первого этапа решения геомеханической задачи (Этап А)

б) **Блок Б.** Получение трехмерного куба параметров среды и проведение в нем расчета напряженно-деформированного состояния.

В рамках этого этапа данные по траекториям скважин распространяются на весь исследуемый объем, задаются параметры расчетной сети и граничные условия. Затем проводится расчет давлений и напряженно-деформированного состояния по всему исследуемому объему.

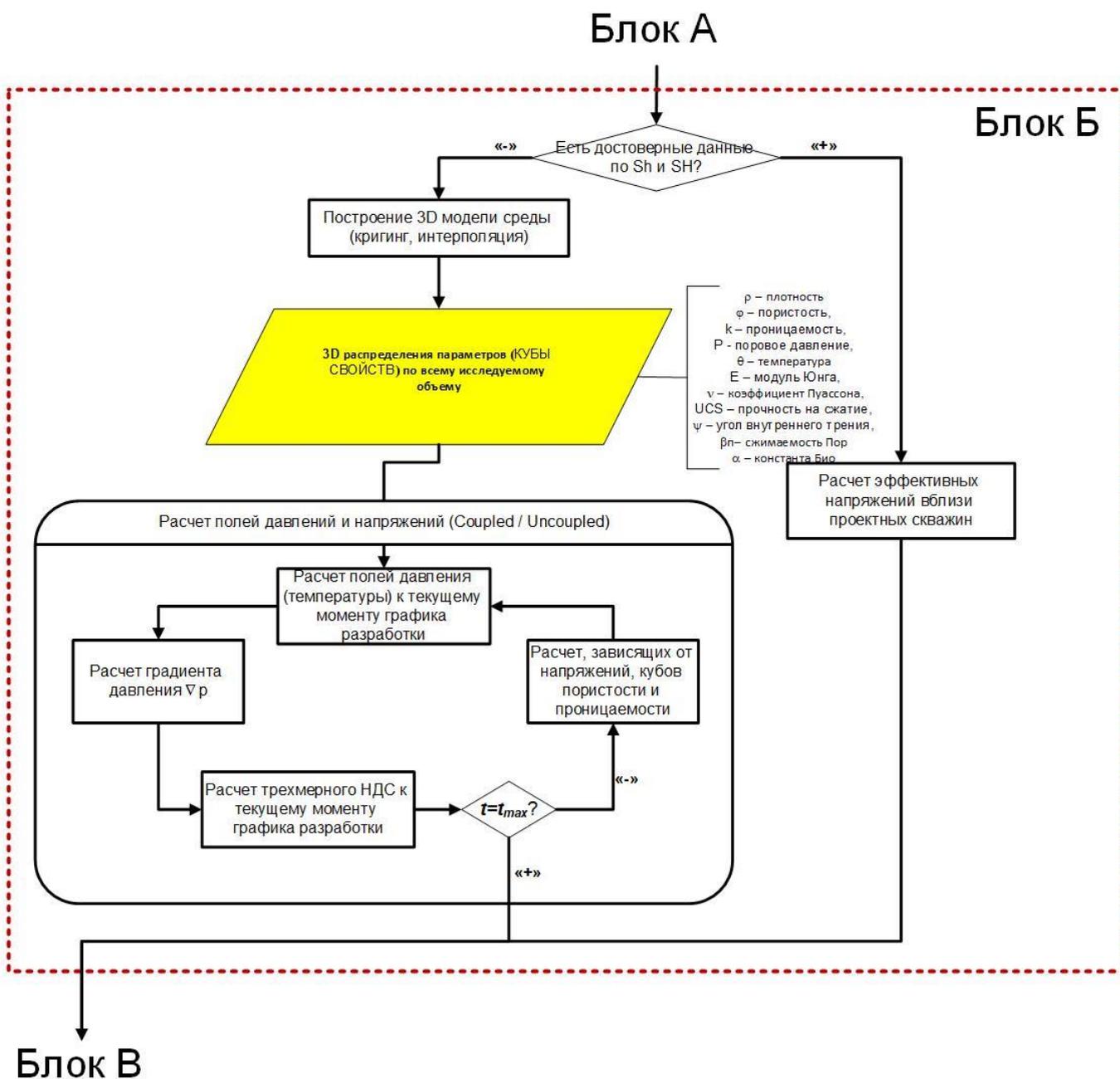


Рисунок 3 – Схема второго этапа решения геомеханической задачи (Этап Б)

в) **Блок В.** Анализ результатов моделирования под решаемые задачи геомеханики.

На этом этапе проводится анализ результатов моделирования. При неудовлетворительных результатах моделирования изменяются объекты Блока А. Затем процесс повторяется, начиная с первого этапа. Результатом данного этапа являются отчеты для частных задач геомеханики.

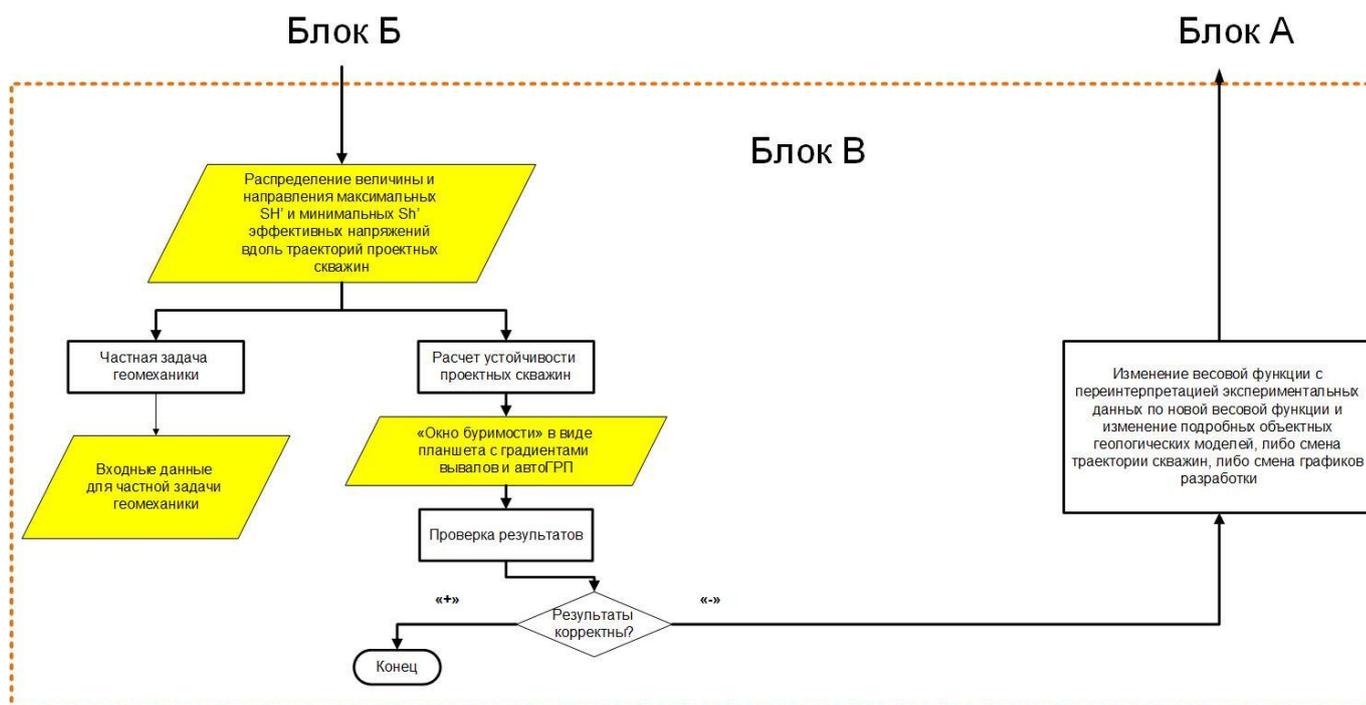


Рисунок 4 – Схема второго этапа решения геомеханической задачи (Этап В).

### 1.3 Схема функционирования расчетного модуля для решения задачи геомеханического моделирования

Исходя из предложенной выше схемы решения задачи геомеханики необходимо реализовать расчетный модуль, который будет удовлетворять схеме функционирования расчетного модуля для 1D (см. Рисунок 6) задачи и 3D задачи (см. Рисунок 7), обеспечивая связь между модулями как показано на следующем рисунке:

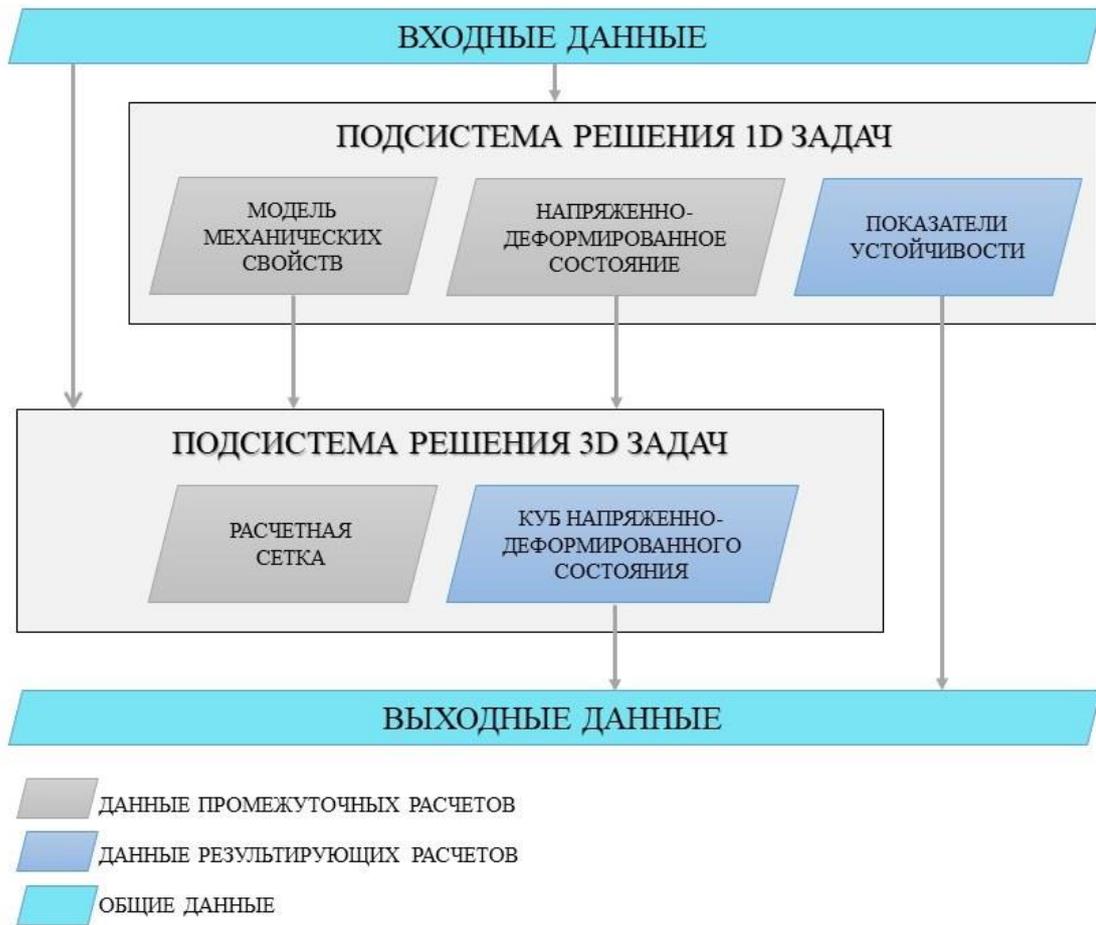


Рисунок 5 – Связь между модулями 1D и 3D геомеханического моделирования

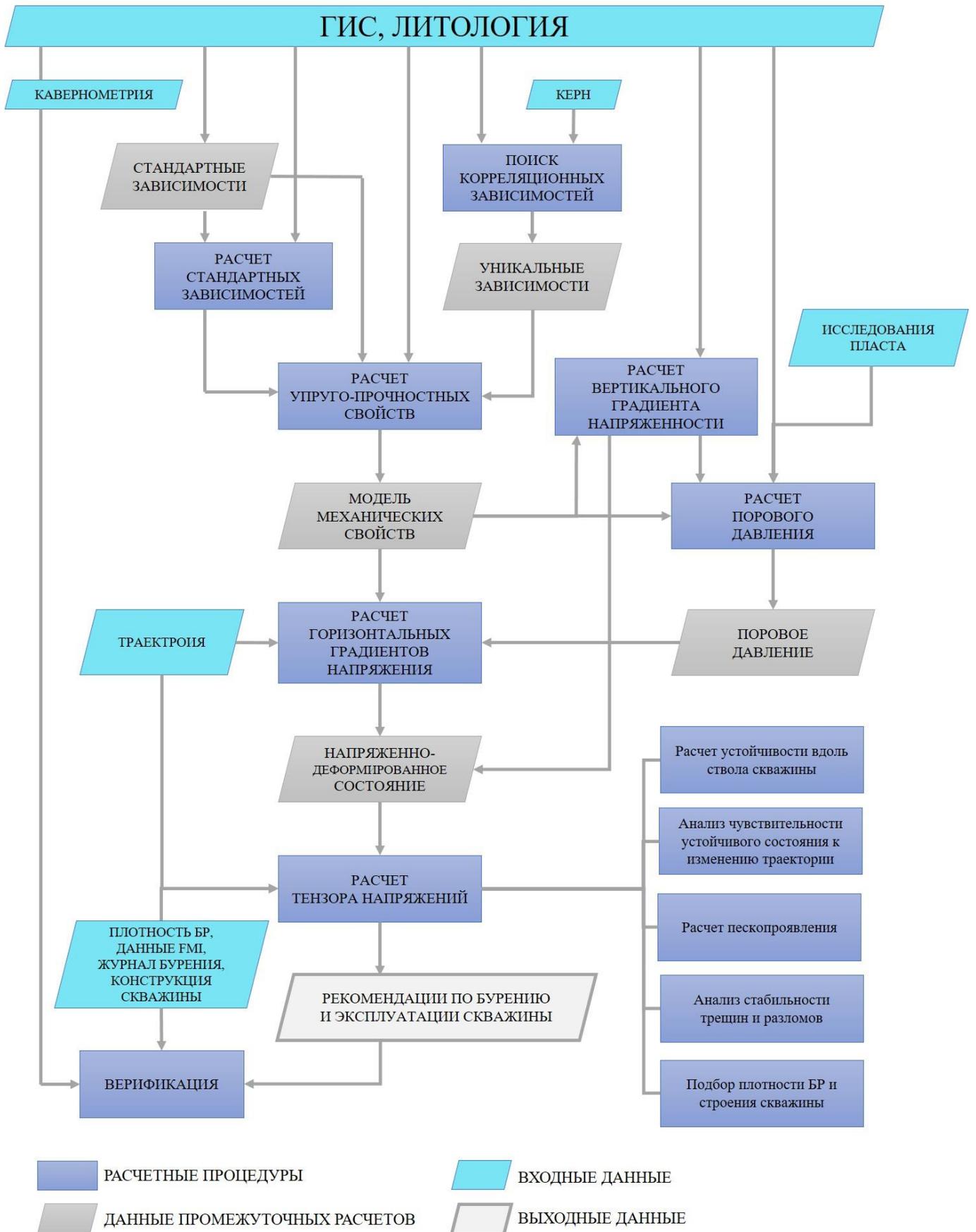


Рисунок 6 – Схема функционирования расчетного модуля для решения одномерной задачи геомеханического моделирования

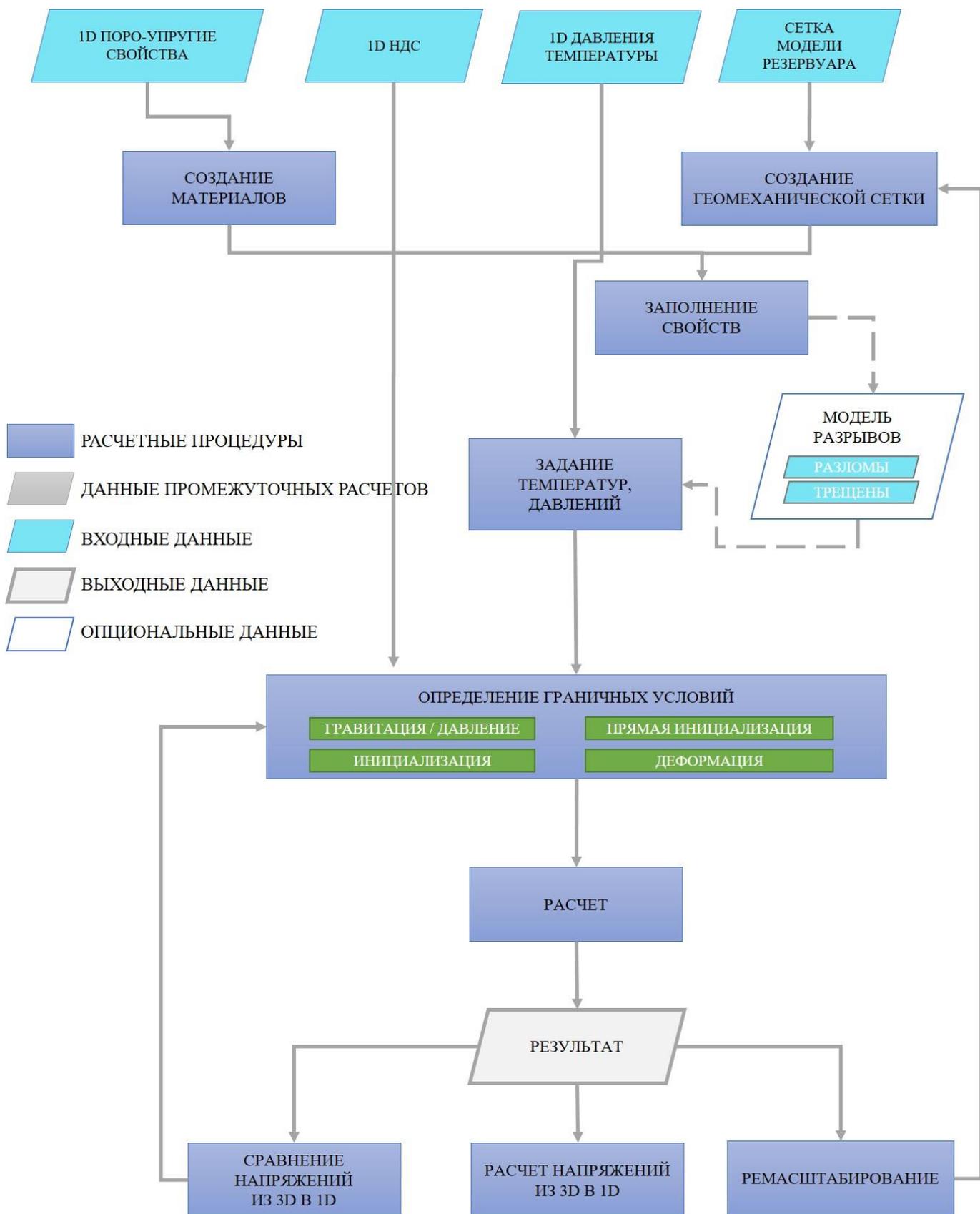


Рисунок 7 – Схема функционирования расчетного модуля для решения трехмерной задачи геомеханического моделирования

## 1.4 Структура хранения данных

Для реализации расчетного модуля предлагается разделить данные на те, которые относятся только к трехмерному моделированию, и те, которые получаются в рамках одномерного моделирования. Схема данных в таком случае выглядит следующим образом:

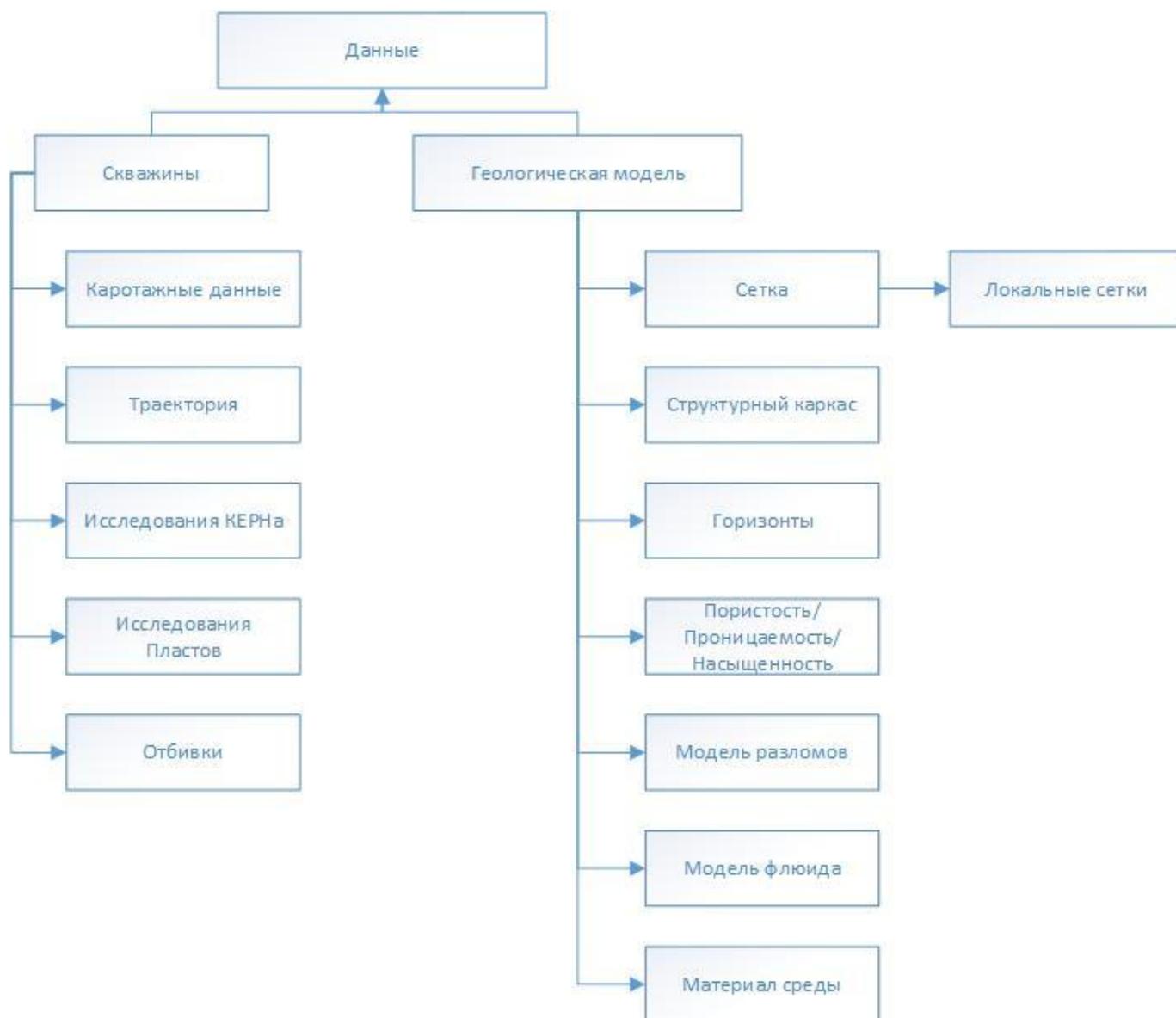


Рисунок 8 – Модель данных для расчетного модуля

## 1.5 Формирование отчета

Исходя из результатов анализа программных продуктов, описанных в отчете о НИР «Анализ мирового опыта и постановка задач для 1D и 3D геомеханического моделирования», можно составить требования к функционированию процедур формирования отчетов.

Процедура формирования отчета заключается в создании отчетов и брошюр, используя внутренние объекты расчетного модуля, такие как данные кривых, планшеты, стереограммы и т.д. Необходимо наличие возможности загрузки или создания шаблонов отчетов с динамическим содержанием, связанным с данными расчетного модуля, такими как свойства скважин, кривых, поверхностей, срезом, кроссплотов и т.д. Единовременно сформированные шаблоны отчетов, сохраненные в проект расчетного модуля, могут в последствии быть применены к другим частям проекта. При этом динамические связи обновляются для всех сохраненных объектов.

Процедура формирования отчетов должна иметь минимальную функциональность для редактирования внешних и внутренних объектов расчетного модуля. Графические шаблоны должны быть готовы к использованию до их введения в отчет и применения к ним новых данных проекта. Если шаблон введен в отчет, он должен быть доступен, а переменные для поиска должны существовать в проекте. Требуется поддерживать следующие действия:

- расслоение объектов;
- привязывать объекты проекта друг к другу для сохранения позиции в документе;
- автоматически подстраивать объекты под содержимое при изменении его размеров;
- подстраивать объекты под страницу. Объекты всегда хранятся внутри рамки, определяющей их размер и позицию;
- использовать механизм блокировки для предотвращения перемещений и редактирования объектов.

При генерации отчета требуется пройти ключевые этапы создания отчета:

1) редактирование структуры отчета;

На этом этапе можно выполнять различные действия с отдельными секциями или главами:

- а) добавление новой снизу,
- б) вставка новой сверху,
- в) изменение порядка следования в отчете (вверх и вниз),
- г) удаление выбранной,
- д) изменение имени,
- е) включение и выключение показа;

2) редактирование страницы;

На этом этапе возможно проводить редактирование страниц отчета, которое включает:

- а) добавление номеров страниц путем вставки соответствующего тега на странице; с пользовательским текстом и форматом,
- б) выбор стартовой страницы для начала нумерации страниц,
- в) вставка картинок, областей, линий, таблиц и текста,
- г) просмотр конечного вида страницы отчета;

Текущая страница должна применяться к секции, выбранной вначале. Должна быть возможность применения страницы для всех секций.

### 3) установление иерархии отчета;

Этап предназначен для добавления оглавления содержимого, иллюстраций и таблиц. Должна быть возможность выбрать режим нумерации оглавления из следующих:

- а) иерархический,
  - б) последовательный;
- 4) работа с объектами проекта;

На этом этапе можно создать шаблон для освобождения места под объекты, которые будут добавлены в отчет. Объектами могут выступать заголовки, слои, кроссплоты, гистограммы, линейные графики, стереограммы, картинки, тексты, срезы и т.д. Затем можно будет заполнить шаблон другими подобными объектами.

### 5) настройка объектов.

После добавления объектов, их свойства могут быть изменены. Необходимо иметь свойства для различных типов объектов как перечислено в таблице.

Таблица 1 – Таблица настраиваемых свойств объектов в редакторе отчетов

<b>Свойства</b>	<b>Описание</b>	<b>Тип объекта</b>
Настроить под страницу	Автоматически настраивает объекты по горизонтали к полям или к краю страницы	Любой
Расположение		Любой
Выравнивание	Выравнивает объект влево, по центру и вправо	Любой
Горизонтальное положение	Настраивает горизонтальное положение объекта вручную	Любой
Вертикальное положение	Настраивает вертикальное положение объекта вручную	Любой
Относительное положение	Можно установить позицию любых объектов относительно других объектов	Любой

<b>Свойства</b>	<b>Описание</b>	<b>Тип объекта</b>
Разделяемый объект	Можно разделить разделяемый объект на несколько страниц	Любой
Размер		Любой
Ширина	Задается ширина объекта вручную	Любой
Высота	Задается высота объекта вручную	Любой
Авто настройка высоты под содержимое	Настройка высоты текста в соответствии с содержимым	Текст
Граница	Задается ширина границ	Любой
Цвет границы	Задается цвет границ	Любой
Закрепить	Можно заблокировать положение объекта, а для текста и таблиц заблокировать содержимое	Любой
В содержание	Показывать объект в содержании	Любой
В иллюстрациях	Показывать объект в иллюстрациях	Планшеты, Срезы, Картинки, Карты, Перспективы, Графики
В Таблицах	Показывать объект в таблицах	Таблицы
Масштаб	Изменение масштаба макета	Макеты
Легенды	Показывать/скрывать легенду у графиков	Графики и макеты
Прозрачность	Задание прозрачности у текста и картинок	Тексты и картинки
Ориентация	Задание ориентации текста	Текст
Вертикальное выравнивание	Задание вертикального выравнивания текста в своих границах	Текст
Фон	Включение отображения фона	Текст и таблицы
Цвет фона	Задание цвета у фона	Текст и таблицы

## 2 Расчетный модуль для численного решения 1D задачи геомеханического моделирования

### 2.1 Схема решения задачи

Для задач, требующих отдельного описания, введем входные данные в терминах типов данных, краткое описание алгоритма решения, существенные особенности реализации и ее обоснование. Алгоритмы будут записаны преимущественно на псевдокоде или, при необходимости, на языке C++.

Данные, которые представляют собой набор величин на определенных глубинах в скважине, будем представлять в виде массивов  $\{X_i\}_{i=0}^{N-1}$ , где  $X_i$  – массив из измеренных значений одного параметра,  $N$  – количество измерений.

Данными, находящимися на одной сетке глубин, будем называть такие два массива  $X_1$  и  $X_2$ , у которых глубины, имеющие одинаковый порядковый номер, совпадают.

### 2.2 Расчет упруго-прочностных свойств

#### 2.2.1 Типы входных данных

Входными данными для процедуры расчета упруго-прочностных свойств являются:

- данные ГИС;
- данные керновых исследований в скважине.

Выходными данными являются распределение упруго-прочностных свойств по разрезу.

#### 2.2.2 Стохастический метод решения поиска и оценки корреляционных зависимостей

Исходя из аналитической работы, проведенной в рамках первой части отчета о НИР «Разработка и математическое обоснование высокоточных вычислительных методов для численного решения 1D и 3D задач геомеханического моделирования», необходимо реализовать следующие высокоточные расчётные процедуры:

- проведение кластеризации по обучающей выборке данных;
- уменьшение размерности множества векторов методом главных компонент;
- построение корреляционных зависимостей.

### 2.2.2.1 Подготовка данных

Входные данные, на которых предполагается строить корреляции, имеют разную физическую основу и широкий диапазон величин. Это накладывает необходимость приведения данных к единому диапазону и единой сетке глубин на каждом шаге алгоритма.

### 2.2.2.2 Методы кластеризации

В задаче кластеризации необходимо разделить обучающую выборку ( $X^t = \{x_1, \dots, x_N\} \subset X$ ) на непересекающиеся подмножества (кластеры) таким образом, чтобы объекты разных кластеров существенно отличались, и при этом каждый кластер состоял из объектов, близких по метрике  $\rho$ . Всем объектам  $x_i \in X$  приписывается метка (или номер) кластера  $y_i$ . Соответственно алгоритм кластеризации – это функция  $\alpha: X \rightarrow Y$ . Некоторые алгоритмы кластеризации могут учитывать заранее известное множество меток  $Y$ , однако наиболее частая задача состоит в определении оптимального числа кластеров по критерию качества кластеризации.

Задача кластеризации является неоднозначной из-за своей природы. Во-первых, однозначно наилучшего критерия качества кластеризации не существует. Существенное большое количество алгоритмов, у которых достаточно разумных критериев, но при этом есть и такие, у которых нет достаточно чётко выраженного критерия, но они обеспечивают разумную кластеризацию. Результаты при этом будут разные. Во-вторых, заранее неизвестно число кластеров, и оно устанавливается с заведомо субъективным критерием. В-третьих, выбор метрики существенно влияет на результат кластеризации, а он определяется экспертом и субъективен.

Таким образом целесообразно реализовать по одному варианту представителей разного типа алгоритмов кластеризации и затем объединить их результаты в единое разбиение.

#### 2.2.2.2.1 Метод k-средних

Основная задача этого метода состоит в разбиении элементов пространства, представляющих собой вектор, на заданное число кластеров  $k$  [1,2,3]. В процессе работы алгоритм минимизирует среднеквадратичное отклонение, полученное на точках каждого кластера. Переход от одного состояния в следующее происходит на основании вычисления центра масс для каждого кластера, после чего объекты

перераспределяются в соответствии с расстоянием до центра масс при выбранной метрике. Условием завершения алгоритма является отсутствие изменения в распределении объектов по кластерам.

Формально алгоритм может быть записан следующим образом:

- а) сформировать начальное приближение центров всех кластеров  $y \in Y$  случайным образом.  $\mu_y$  – это наиболее удаленные объекты кластера;
- б) каждый объект относится к ближайшей выборке (1):

$$y_i := \arg \min \rho(x_i, \mu_y), i = 1, \dots, l; y \in Y \quad (1)$$

**в) повторять;**

- г) перевычисляется новое положение центров кластеров (2):

$$\mu_{yj} := \frac{\sum_{i=1}^l [y_i=y] f_j(x_i)}{\sum_{i=1}^l [y_i=y]}, j = 1, \dots, n, y \in Y; \quad (2)$$

- д) **пока**  $y_i$  не перестанут изменяться;

Из недостатков алгоритма можно выделить:

- необходимость знать заранее количество кластеров;
- чувствительность к выбору начальных центров кластеров.

Последовательная сложность алгоритма:  $O(i*k*n*d)$ , где  $n$  – векторов,  $d$  – размерность векторного пространства,  $k$  – количество кластеров,  $i$  – количество итераций.

Параллельная сложность алгоритма:  $O(i*\log(k*n*d))$ . Источником параллелизма являются попарные расчеты расстояния (алгоритмом нахождения частичной суммы элементов массива путем сдваивания), операция нахождения минимума и пересчет центра масс.

#### 2.2.2.2.2 Статистический EM-алгоритм

Алгоритм EM [4] основан на вычислении расстояний и является некоторым обобщением кластеризации, основанной на анализе совокупности вероятностных распределений. Алгоритм в процессе работы итеративно улучшает решение, при этом он останавливается в момент достижения требуемого уровня точности модели.

В качестве меры такого случая является монотонно увеличивающаяся статистическая величина, которую называют *логарифмическим правдоподобием*. Целью такого алгоритма является оценка средних значений  $S$ , ковариаций  $R$  и весов смеси  $W$  для функции распределения вероятности (3):

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \times \pi \times \sigma^2}} \times \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2 \times \sigma^2} \right\}, \quad (3)$$

где  $\mu$  – математическое ожидание,

$\sigma^2$  - дисперсия.

Алгоритм состоит из набора итераций, каждая из которых содержит два шага:

- вычисление математических ожиданий;
- максимизацию.

Реализация алгоритма EM может быть проиллюстрирована с помощью следующего псевдокода:

а) начальное приближение для всех кластеров  $y \in Y$  (4)(5)(6):

$$\omega_y := 1/|Y| \quad (4)$$

$$\mu_y := \text{случайный объект выборки} \quad (5)$$

$$\sigma_{yj}^2 := \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1}^l (f_j(x_i) - \mu_{yj})^2, j = 1, \dots, n \quad (6)$$

**б) повторять;**

в) E-шаг (expectation) (7):

$$g_{iy} := \frac{\omega_y p_y(x_i)}{\sum_{z \in Y} \omega_z p_z(x_i)}, y \in Y, i = 1, \dots, l \quad (7)$$

г) M-шаг (maximization) (8) (9) (10):

$$\omega_y := \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l g_{iy}, y \in Y \quad (8)$$

$$\mu_{yj} := \frac{1}{l \omega_y} \sum_{i=1}^l g_{iy} f_j(x_i), y \in Y, j = 1, \dots, n \quad (9)$$

$$\sigma_{yj}^2 := \frac{1}{l \omega_y} \sum_{i=1}^l g_{iy} (f_j(x_i) - \mu_{yj})^2, y \in Y, j = 1, \dots, n \quad (10)$$

д) отнести объекты к кластерам по байесовскому решающему правилу (11):

$$y_i := \arg \max g_{ij}, y \in Y, j = 1, \dots, n \quad (11)$$

е) **пока**  $y_i$  не перестанут изменяться.

К недостаткам этого алгоритма можно отнести:

- не всегда выполняется предположение о том, измеренные данные нормальны;
- сходимость алгоритма может быть медленной в случае неудачной инициализации;
- при достижении локального минимума алгоритм может остановиться и дать квазиоптимальное решение.

Последовательная сложность итерации EM-алгоритма в случае недиагональных ковариационных матриц имеет порядок  $O(k*q^3+n*k*q^2)$ , а в случае диагональных ковариационных матриц –  $O(n*k*q)$ . При этом, если  $k \ll n$  и  $q \ll n$ , то в случае недиагональных ковариационных матриц сложность может быть записана в виде  $O(n*k*q^2)$ .

Параллельная сложность при классификации по ширине ярусно-параллельной формы будет  $O(n*k)$ , а по высоте ярусно-параллельной формы  $O(\log(n*k))$ .

#### 2.2.2.2.3 Алгоритм FOREL

Пусть задана некоторая точка  $x_0 \in X$  и параметр  $R$ . Выделяются все точки выборки  $x_i \in X^l$ , которые попадают внутрь сферы  $\rho(x_i, x_0) \leq R$ , и точка  $x_0$  перемещается в центр тяжести выделенных точек. Повторение процедуры происходит до тех пор, пока не перестанет меняться состав выделенных точек, а значит и положение центра. Было доказано, что схождение процедуры осуществляется за конечное число итераций. При этом сфера перемещается вместо локального сгущения точек [5,6].

Между собой алгоритмы FOREL отличаются способами объединения сфер в кластеры, варьирования параметра  $R$ , выбора начального приближения для точек  $x_0$ . В предложенном алгоритме сферы строятся последовательно:

а) инициализировать множество некластеризованных точек (12):

$$U := X^l \quad (12)$$

- б) **пока** в выборке есть некластеризованные точки,  $U \neq \emptyset$
- в) взять произвольную точку  $x_0 \in U$  случайным образом;
- г) **повторять**;

д) образовать кластер – сферу с центром в  $x_0$  и радиусом  $R$  (13):

$$K_0 := \{x_i \in U \mid \rho(x_i, x_0) \leq R\} \quad (13)$$

е) поместить центр сферы в центр масс кластера (14):

$$x_0 := \frac{1}{|K_0|} \sum_{x_i \in K_0} x_i \quad (14)$$

ж) пока центр  $x_0$  не стабилизируется

з) пометить все точки  $K_0$  как кластеризованные (15):

$$U := U \setminus K_0 \quad (15)$$

и) применить алгоритм КНП к множеству центров всех найденных кластеров

к) каждый объект  $x_i \in X^l$  приписать кластеру с ближайшим центром

На шаге и к центрам этих сфер применяется алгоритм КНП. Такая реализация решает проблему низкой эффективности КНП, так как сфер гораздо меньше, чем исходных объектов. Также в результате получается двухуровневая структура кластеров: каждый кластер верхнего уровня распадается на более мелкие подкластеры нижнего уровня.

К недостаткам данного алгоритма можно отнести сильную зависимость от начального приближения  $x_0$ .

#### 2.2.2.2.4 Иерархическая кластеризация

Иерархические алгоритмы кластеризации в отличие от описанных выше алгоритмов выстраивают не одно разбиение выборки на непересекающиеся классы, а систему вложенных разбиений.

Реализация агломеративного алгоритма представлена ниже [7,8]:

а) инициализировать множество кластеров  $C_1$  (16):

$$t := 1; C_t = \{\{x_1\}, \dots, \{x_l\}\} \quad (16)$$

б) для всех  $t = 2, \dots, l$  ( $t$  – номер итерации)

в) найти в  $C_{t-1}$  два ближайших кластера (17) (18):

$$(U, V) := \arg \min R(U, V); U \neq V \quad (17)$$

$$R_t := R(U, V) \quad (18)$$

г) изъять кластеры  $U$  и  $V$ , добавить слитый кластер  $W=U \cup V$  (19):

$$C_t := C_{t-1} \cup \{W\} \setminus \{U, V\} \quad (19)$$

д) для всех  $S \in C_t$

е) вычислить расстояние  $R(W, S)$  по формуле Ланса-Уильямса [9,10,11].

На практике используют следующие способы вычисления расстояний  $R(W, S)$  между кластерами  $W$  и  $S$ . Для каждого из них доказано соответствие формуле Ланса-Уильямса при определённых сочетаниях параметров:

Расстояние ближнего соседа (20):

$$R^b(W, S) = \min_{w \in W, s \in S} \rho(w, s); \alpha_U = \alpha_V = \frac{1}{2}, \beta = 0, \gamma = -\frac{1}{2} \quad (20)$$

Расстояние дальнего соседа (21):

$$R^d(W, S) = \max_{w \in W, s \in S} \rho(w, s); \alpha_U = \alpha_V = \frac{1}{2}, \beta = 0, \gamma = \frac{1}{2} \quad (21)$$

Среднее расстояние (22):

$$R^c(W, S) = \frac{1}{|W||S|} \sum_{w \in W} \sum_{s \in S} \rho(w, s); \alpha_U = \frac{|U|}{|W|}, \alpha_V = \frac{|V|}{|W|}, \beta = \gamma = 0 \quad (22)$$

Расстояние между центрами (23):

$$R^u(W, S) = \rho^2 \left( \sum_{w \in W} \frac{w}{|W|}, \sum_{s \in S} \frac{s}{|S|} \right); \alpha_U = \frac{|U|}{|W|}, \alpha_V = \frac{|V|}{|W|}, \beta = -\alpha_U \alpha_V, \gamma = 0 \quad (23)$$

Расстояние Уорда (24):

$$R^y(W, S) = \frac{|S||W|}{|S|+|W|} \rho^2 \left( \sum_{w \in W} \frac{w}{|W|}, \sum_{s \in S} \frac{s}{|S|} \right); \alpha_U = \frac{|S|+|U|}{|S|+|W|}, \alpha_V = \frac{|S|+|V|}{|S|+|W|}, \beta = \frac{-|S|}{|S|+|W|}, \gamma = 0 \quad (24)$$

Представленные расстояния имеют свои недостатки и могут не подходить для конкретного набора данных. Так, метод ближнего соседа в некоторых случаях присоединяет ближайšie к границе объекты, что приводит к появлению кластеров ленточной формы. Метод дальнего соседа может создавать кластер с довольно несхожими группами на раннем этапе. Расстояние между центрами масс не монотонно и не редуکتивно.

Сложность представленного алгоритма составляет  $O(n^2 \cdot \log(n))$ , где  $n$  – количество векторов.

Существуют варианты распараллеливания этого алгоритма со сложностью  $O(n \cdot \log(n))$  на  $\frac{n}{\log(n)}$  параллельных потоках, и  $O(n)$  на  $n$  потоках.

### 2.2.2.3 Метод главных компонент

Метод главных компонент [12,13] (РСА) является наиболее популярным способом сжатия данных в многомерном анализе. В его основе лежит поиск проекции на гиперплоскость с сохранением большей части дисперсии в данных. В рассматриваемой задаче РСА используется для выделения только значимых компонент из обучающей выборке данных при нахождении корреляционной зависимости.

С математической точки зрения РСА – это декомпозиция исходной матрицы  $X$ , т.е. представление ее в виде произведения двух матриц  $T$  и  $P$  (25):

$$X = TP^t + E, \quad (25)$$

где матрица  $T$  – матрица счетов,

матрица  $P$  – матрица нагрузок,

$E$  – матрица остатков.

Для построения РСА счетов и нагрузок используется рекуррентный алгоритм NIPALS [14], который на каждом шагу вычисляет одну компоненту. Сначала исходная матрица  $X$  центрируется и нормируется, превращаясь в матрицу  $E_0$ ,  $a=0$ . Центрирование – это вычитание из каждого столбца  $x_j$  среднего (по столбцу) значения (26):

$$m_j = (x_{1j} + \dots + x_{ij}) / I \quad (26)$$

Нормирование – это преобразование, которое выравнивает вклад разных переменных в РСА модель. При этом преобразовании каждый столбец  $x_j$  делится на свое стандартное отклонение (27):

$$s_j = \sqrt{\sum_{i=1}^I (x_{ij} - m_j)^2 / I} \quad (27)$$

Далее применяют следующий алгоритм:

```
function [T,P] = pscanipals(X, numberPC)
% pscanipal: рассчитывает компоненты РСА
% Выход: матрицы T и P
```

```

% T содержит счета
% P содержит нагрузки

% расчет количества компонент
[X_r, X_c] = size(X); P=[]; T=[]

if length(number PC) > 0
    pc = numberPC{1};
elseif (length(numberPC) == 0) & X_r < X_c
    pc = X_r;
else
    pc = X_c;
end;

% расчет счетов и нагрузок для каждой компоненты
For k = 1:pc
    P1 = rand(X_c, 1); T1 = X * P1; d0 = T1'*T1;
    P1 = (T1' * X/(T1' * T1))'; P1 = P1/norm(P1); T1 = X * P1; d = T1' * T1;

    while d - d0 > 0.0001;
        P1 = (T1' * X/(T1' * T1))'; P1 = P1/norm(P1); T1 = X * P1; d0 = T1' * T1;
        P1 = (T1' * X/(T1' * T1))'; P1 = P1/norm(P1); T1 = X * P1; d = T1' * T1;
    end

    X = X - T1 * P1; P = cat(1,P,P1'); T = [T, T1];
end

```

Стоит учитывать, что метод главных компонент способен находить только линейные подпространства исходного пространства. PCA является инвариантным относительно поворота координат в пространстве латентных переменных. Это означает, что восстановление значений латентных переменных является неоднозначным. В ряде случаев такая ситуация может быть неадекватной, например, в задаче разделения независимых источников, представленных линейной смесью с неизвестными коэффициентами.

Если  $X$  матрица размером  $M \times N$ , то вычислительная сложность алгоритма (28):

$$O \cdot (M^2 \cdot N + M^3) \quad (28)$$

#### 2.2.2.4 Оценка погрешности

Для определения погрешности производится оценка корреляционных зависимостей на элементах, соответствующих кластерам тестовой выборки.

Результатом PCA моделирования являются величины  $\hat{X}_c$  – оценки, найденные по модели, построенной на обучающей выборке  $X_c$ . Результатом проверки служат величины  $\hat{X}_t$  – оценки проверочных значений  $X_t$ , вычисленные по той же модели на тестовой выборке. Отклонение оценки от проверочного значения вычисляют как матрицу остатков:

– в обучении (29):

$$E_c = X_c - \hat{X}_c \quad (29)$$

и в проверке (30):

$$E_t = X_t - \hat{X}_t \quad (30)$$

Полная дисперсия остатков в обучении (TRVC) и в проверке (TRVP) (31) (32):

$$TRVC = \frac{1}{I_c J} \sum_{i=1}^{I_c} \sum_{j=1}^J e_{ij}^2 = D_c \quad (31)$$

$$TRVP = \frac{1}{I_t J} \sum_{i=1}^{I_t} \sum_{j=1}^J e_{ij}^2 = D_t \quad (32)$$

Объясненная дисперсия остатков в обучении (ERVC) и в проверке (ERVP) (33) (34):

$$ERVC = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{I_c} \sum_{j=1}^J e_{ij}^2}{\sum_{i=1}^{I_c} \sum_{j=1}^J x_{ij}^2} \quad (33)$$

$$ERVP = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{I_t} \sum_{j=1}^J e_{ij}^2}{\sum_{i=1}^{I_t} \sum_{j=1}^J x_{ij}^2} \quad (34)$$

Объясненная дисперсия – это относительная величина. При ее вычислении используется естественная нормировка – сумма квадратов всех исходных величин. Выраженная в процентах объясненная дисперсия характеризует погрешность стохастического метода.

### 2.2.2.5 Выбор инструментов для реализации

Предложенный стохастический метод поиска и оценки корреляционных зависимостей требует высоких вычислительных ресурсов, поэтому язык реализации должен обладать возможностью распараллеливания и низкоуровневой оптимизацией кода. Примером такого языка служит C/C++.

### 2.2.3 Детерминистический метод расчета зависимостей

Был проведен анализ вида табличных зависимостей.

Реализация расчетов таких зависимостей не требует низкоуровневых средств оптимизации, при этом возможно распараллеливание вычислений по глубине. Такое распараллеливание требует проведения предварительной процедуры для разбора взаимных зависимостей.

## 2.3 Расчет вертикального напряжения

Расчет вертикального напряжения вычисляется путем интегрирования плотности по глубине. В качестве сетки для интегрирования разумно брать точки глубинной сетки начальных данных.

Таким образом алгоритм будет выглядеть следующим образом (35):

$$\begin{aligned} \sigma V g_1 &= \frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_1) \\ \text{for } i &= 1 \dots nn - 2 \\ \sigma V g_i &= \frac{TVD_{i-1} \cdot \sigma V g_{i-1} + 0.5(\rho_i + \rho_{i-1}) \cdot (TVD_i - TVD_{i-1})}{TVD_i} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\sigma V g_{nn-1} = \sigma V g_{nn-2},$$

где TVD – истинная глубина,

$\rho_i$  – плотность горных пород в  $i$ -ой точке глубины,

$\rho_0$  – плотность на дневной поверхности.

Входные данные (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- истинная глубина, непрерывная кривая, м, строго монотонная кривая;
- плотность горной породы, непрерывная кривая, г/см<sup>3</sup>, >0;
- плотность на дневной поверхности, число, г/см<sup>3</sup>, >0;
- ускорение свободного падения, число, м/с<sup>2</sup>, >0.

Перечень выходных данных для каждого неизвестного параметра:

– кривая градиента вертикального напряжения по разрезу, непрерывная кривая,  $\text{г/см}^3, \geq 0$ .

## 2.4 Расчет порового давления

Расчёт порового давления может быть осуществлен по нескольким методикам, описанным в первой части отчета «Разработка и математическое обоснование высокоточных вычислительных методов для численного решения 1D и 3D задач геомеханического моделирования». В основном, методики предполагают поточечный расчет градиента порового давления при известных входных данных. Описание расчетной схемы для таких методик будет выглядеть тривиально: последовательный или параллельный расчет для каждой глубины, где есть входные данные.

Для некоторых методик требуется производить расчет относительно трендовой линии. Для этого необходимо рассчитать линию тренда.  $X$  – массив значений,  $Y$  – массив глубин. Такая линия может быть линейной, экспоненциальной или степенной:

- линейная  $y=ax+b$ ;
- логарифмическая  $y=a*\ln(x)+b$ ;
- экспоненциальная  $y=a*e^{bx}$ ;
- степенная  $y=a*x^b$ .

Для предложенных видов тренда существует аналитическое решение метода наименьших квадратов. Коэффициенты  $a$  и  $b$  для линейного тренда вычисляются из (36):

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a - b_i x_i)^2 \rightarrow \min \quad (36)$$

Уравнения для расчета параметров линейной парной регрессии имеют вид:

$$\begin{aligned} na + b \sum_i x_i &= \sum_i y_i; \\ a \sum_i x_i + b \sum_i x_i^2 &= \sum_i x_i y_i \end{aligned} \quad (37)$$

Соответственно (38):

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2)}, \text{ а так же } a = \bar{y} \pm b \bar{x} \quad (38)$$

Для логарифмического тренда необходимо заменить  $y \rightarrow \exp(y)$ .

Для экспоненциального тренда необходимо заменить  $y \rightarrow \text{Log}(y)$ .

Для степенного тренда необходимо заменить  $x \rightarrow \log(x)$ ,  $y \rightarrow \log(y)$ .

Зачастую требуется проведения тренда через заданную точку  $(x_0, y_0)$ . Для этого рассчитываются начальные коэффициенты тренда по изложенному выше алгоритму. Далее подбираются коэффициенты методом Нелдера-Мида [15] с целевой функцией  $R^2$ .

Входные данные (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- истинная глубина, непрерывная кривая, м, строго монотонная кривая;
- данные выбранной формулы расчета, непрерывная кривая, -,  $>0$ ;
- градиент вертикального напряжения, непрерывная кривая,  $\text{г/см}^3$ ,  $>0$ ;
- данные экспериментальных исследований, точечная кривая, МПа,  $>0$ ;
- имя результирующей кривой, непрерывная кривая,  $\text{г/см}^3$ ,  $>0$ .

Выходные данные (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- кривая градиента порового давления по разрезу, непрерывная кривая,  $\text{г/см}^3$ ,  $\geq 0$ ;
- кривая тренда нормального уплотнения глин, непрерывная кривая, единицы измерения исходной кривой, -.

#### 2.4.1 Оптимизационный алгоритм Нелдера-Мида

Суть метода заключается в последовательном перемещении и деформировании симплекса [16] вокруг точки экстремума.

Одним из самых эффективных алгоритмов поиска экстремума функции многих переменных является симплекс-метод Нелдера-Мида, который не накладывает ограничений на гладкость функции. На каждой итерации алгоритма производится как правило одно или два вычисления значений функции, что чрезвычайно эффективно если эти вычисления очень медленны. Кроме того, алгоритм очень прост в реализации. Главным же его недостатком является отсутствие теории сходимости и наличие примеров, когда метод расходится даже на гладких функциях.

## 2.5 Расчет градиентов горизонтальных напряжений

Расчет градиентов горизонтальных напряжений осуществляется независимо для каждой глубины по формулам, описанным в п. 1.5 отчета о НИР «Разработка и математическое обоснование высокоточных вычислительных методов для численного решения 1D и 3D задач геомеханического моделирования».

Входные данные (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- истинная глубина, непрерывная кривая, м, строго монотонная кривая;
- данные выбранной формулы расчета, непрерывная кривая, -, >0;
- данные экспериментальных исследований, точечная кривая, МПа, >0;
- имя результирующих кривых, непрерывная кривая, г/см<sup>3</sup>, >0;
- деформационные коэффициенты, число, -, >0.

Перечень выходных данных (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- кривые градиента максимального и минимального напряжения по разрезу, непрерывная кривая, г/см<sup>3</sup>, ≥0;
- поле невязок для различных значений деформационных коэффициентов;
- кросс-плот с результирующими кривыми и калибровочными данными.

## 2.6 Расчет устойчивости

Для расчета устойчивости необходимо рассчитать следующие показатели на каждой глубине:

- давление обрушения (сдвиговые нарушения) (39):

$$CWP\_MIN\_MC = \left\{ \frac{P_{30}^3}{MPa} \right\}, \quad (39)$$

- давление инициации трещин растяжения (40):

$$CMW\_MAX\_MTS = \left\{ \frac{P_{30}^3}{MPa} \right\}, \quad (40)$$

- давление начала поглощения (41):

$$CWP\_LOSS = \frac{\sigma h}{MPa} \quad (41)$$

- давление проявления (42):

$$CWP\_KICK = \frac{P_{\Pi}}{\text{МПа}} \quad (42)$$

– давление гидроразрыва по Итону (43):

$$CWP_{FREATON} = \frac{3\sigma h - \sigma H + (1 - 2\alpha B) \cdot P_{\Pi}}{\text{МПа}} + INPUT_{i, \sigma t} \quad (43)$$

– давление инициации трещин сдвига (44):

$$CWP\_MAX\_MC = \frac{P_{32}}{\text{МПа}} \quad (44)$$

где  $\sigma h$ ,  $\sigma H$ ,  $\sigma V$  – градиент минимального горизонтального, максимального горизонтального, вертикального напряжений,

$P_{\Pi}$  – поровое давление,

$\alpha B$  – константа Биота,

$\sigma_t$  – предел прочности на разрыв,

$P_{30}$ ,  $P_{31}$ ,  $P_{32}$  – давления в скважине, при которых происходит обрушение, гидроразрыв и разрушение соответственно.

Для упрощения настройки оптимизационных процедур представим  $P_3(Q) = P_{\Pi} + \Delta P_{\Gamma} \cdot Q$ , где  $\Delta P_{\Gamma} = \sigma V - P_r$ . Тогда, для  $Q$  будет вычисляться (45):

$$\begin{bmatrix} Q_{00} - \left[ \frac{t}{t_0} + C a_0 (|Q_{00} - Q_{min}|)^{-n} \right]^{\frac{1}{n}} \\ Q_t \\ Q_{00} - \left[ \frac{t}{t_0} + C a_1 (|Q_{00} - Q_{min}|)^{-n} \right]^{\frac{1}{n}} \end{bmatrix} \quad (45)$$

где:

$$Q_{00} = \frac{\mu}{1 - \mu}$$

$$t_0 = \left[ A \cdot (n + 1) \cdot \left( \frac{\Delta P_{\Gamma}}{\text{МПа}} \right)^n \right]^{-1} \cdot s; \quad n := 2.5; \quad A := 5 \cdot 10^{-10}$$

$C a_0$  и  $C a_1$  – настроечные коэффициенты для вывалов и разрушений.

$$Q_t = \text{root} \left( \min \sigma \theta (Q_t)_0 + \sigma t, Q_t, -\frac{P_{\Pi}}{\Delta P_{\Gamma}}, 10 \right), \text{ если } \min \sigma \theta \left( -\frac{P_{\Pi}}{\Delta P_{\Gamma}} \right)_0 + \sigma t > 0 \quad (46)$$

$\min \sigma \theta (Q_t)_0$  – минимальное эффективное напряжение для заданного  $Q_t$  среди всех точек на стенке скважины:

$$\begin{pmatrix} Q_{min} \\ Q_{max} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} froot(f, Q_1, Q_0) \\ froot(f, Q_0, Q_2) \end{pmatrix} \quad (47)$$

где  $f(Q)$  – значение критерия прочности.

Функцию *root* в данном случае целесообразно реализовать методом секущей.

Входные данные (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- истинная глубина, интервальная кривая, м, строго монотонная кривая;
- градиент минимального горизонтального напряжения, интервальная кривая, г/см<sup>3</sup>, >0;
- градиент максимального горизонтального напряжения, интервальная кривая, г/см<sup>3</sup>, >0;
- градиент вертикального напряжения, интервальная кривая, г/см<sup>3</sup>, >0;
- азимутальный угол ствола скважины, интервальная кривая, градусы, от 0 до 359;
- азимут направления максимального горизонтального напряжения, интервальная кривая, градусы, от 0 до 359;
- зенитный угол ствола скважины, интервальная кривая, градусы, от 0 до 180;
- градиент порового/пластового давления, интервальная кривая, г/см<sup>3</sup>, >0;
- коэффициент Пуассона (динамический), интервальная кривая, -, >0;
- модуль Юнга (динамический), интервальная кривая, -, >0;
- температурный контраст, интервальная кривая, -, >0;
- температурный коэффициент расширения, интервальная кривая, -, >0;
- константа Био, интервальная кривая, -, >0;
- когезия, интервальная кривая, -, >0;
- угол внутреннего трения, интервальная кривая, -, >0;
- предел прочности на разрыв, интервальная кривая, -, >0;
- предел прочности при неограниченном сжатии, интервальная кривая, -, >0;
- время (обязательное условие), целое число, суток,  $\geq 0$ ;
- вид критерия прочности, перечисление, -, один из {'Mohr-Coulomb', 'Mogi-Coulomb', 'Drucker-Prager+', 'Drucker-Prager-', 'Lade', 'Hoek-Brown', 'Hoek-Brown 3D', 'Weibols-Coock', 'Rabinowitz', 'Stassi-DAlia', 'Murrell', 'von Mises', 'Tresca', 'Griffiths', 'Griffiths mod.'};
- показатель модели Хук-Брауна  $m$ , число, -, >0;
- показатель модели Хук-Брауна  $s$ , число, -, >0;
- интервал глубин пластических деформаций;
- поправка для обрушений, число, -, >0;

- поправка для обрушений, число, -, >0;
- разница температур между буровой жидкостью и породой, интервальная кривая, -, >0;
- имена результирующих кривых, строковые значения, -, удовлетворяет правилам для наименований элементов Проекта.

Перечень выходных данных (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- давление обрушения (сдвиговые нарушения), интервальная кривая,  $\text{г/см}^3$ ,  $\geq 0$ ;
- давление инициации трещин растяжения, интервальная кривая,  $\text{г/см}^3$ ,  $\geq 0$ ;
- давление начала поглощения, интервальная кривая,  $\text{г/см}^3$ ,  $\geq 0$ ;
- давление проявления, интервальная кривая,  $\text{г/см}^3$ ,  $\geq 0$ ;
- давление гидроразрыва по Итону, интервальная кривая,  $\text{г/см}^3$ ,  $\geq 0$ ;
- давление инициации трещин сдвига, интервальная кривая,  $\text{г/см}^3$ ,  $\geq 0$ .

## 2.7 Анализ устойчивости стенок скважины в зависимости от траектории

Входные данные (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- истинная глубина, интервальная кривая, м, строго монотонная кривая;
- давление обрушения (сдвиговые нарушения), интервальная кривая,  $\text{г/см}^3$ ,  $\geq 0$ ;
- градиент минимального горизонтального напряжения, интервальная кривая,  $\text{г/см}^3$ , >0;
- градиент максимального горизонтального напряжения, интервальная кривая,  $\text{г/см}^3$ , >0;
- градиент вертикального напряжения, интервальная кривая,  $\text{г/см}^3$ , >0;
- азимут направления максимального горизонтального напряжения, интервальная кривая, градусы, от 0 до 359;
- градиент порового/пластового давления, интервальная кривая,  $\text{г/см}^3$ , >0;
- коэффициент Пуассона (динамический), интервальная кривая, -, >0;
- модуль Юнга (динамический), интервальная кривая, -, >0;
- температурный контраст, интервальная кривая, -, >0;
- температурный коэффициент расширения, интервальная кривая, -, >0;
- константа Био, интервальная кривая, -, >0;
- когезия, интервальная кривая, -, >0;
- угол внутреннего трения, интервальная кривая, -, >0;
- предел прочности на разрыв, интервальная кривая, -, >0;

- предел прочности при неограниченном сжатии, интервальная кривая, -, >0.
- время (обязательное условие), целое число, суток,  $\geq 0$ .
- вид критерия прочности, перечисление, -, один из {'Mohr-Coulomb', 'Mogi-Coulomb', 'Drucker-Prager+', 'Drucker-Prager-', 'Lade', 'Hoek-Brown', 'Hoek-Brown 3D', 'Weibols-Cooock', 'Rabinowitz', 'Stassi-DAlia', 'Murrell', 'von Mises', 'Tresca', 'Griffiths', 'Griffiths mod.'};
- показатель модели Хук-Брауна  $m$ , число, -, >0;
- показатель модели Хук-Брауна  $s$ , число, -, >0;
- интервал глубин пластических деформаций;
- поправка для обрушений, число, -, >0;
- поправка для обрушений, число, -, >0;
- разница температур между буровой жидкостью и породой, интервальная кривая, -, >0;
- имена результирующих кривых, строковые значения, -, удовлетворяет правилам для наименований элементов Проекта.

Перечень выходных данных:

- стереограмма стабильности для обрушения;
- стереограмма стабильности для гидроразрыва.

## 2.8 Расчет пескопроявления

Входные данные (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- TVD, инклинометрия скважины (наклон, азимут), непрерывная кривая, м,  $\geq 0$ ;
- статический коэффициент Пуассона, коэффициент всестороннего сжатия, число,  $\geq 0$ ;
- поровое давление, непрерывная кривая, г/см<sup>3</sup>,  $\geq 0$ ;
- минимальное и максимальное горизонтальные напряжения, вертикальное давление, непрерывная кривая, г/см<sup>3</sup>,  $\geq 0$ ;
- диаметр скважины, число, м,  $\geq 0$ , по умолчанию 0,2125 м;
- направление максимального горизонтального стресса, непрерывная кривая, по умолчанию 0;
- отношение изменения напряжения, непрерывная кривая, по умолчанию 0;
- диаметр песчаных зерен, число, мкм,  $\geq 0$ , по умолчанию 160;
- тип заканчивания, по умолчанию перфорация;

- максимальный диаметр перфорации, непрерывная кривая, м,  $\geq 0$ ;
- ориентация перфорации непрерывная кривая, °, по умолчанию 0;
- скорость истощения непрерывная кривая, %, по умолчанию: 0, 15, 25, 35 %;
- пользовательская скорость истощения, непрерывная кривая, %,  $\geq 0$ ;

Перечень выходных данных:

- графическое отображение кривые критического забойного давления для выбранных скоростей.

## 2.9 Анализ стабильности трещин и разломов

Входные данные (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- минимальное и максимальное горизонтальные напряжения, вертикальное давление, непрерывная кривая, г/см<sup>3</sup>,  $\geq 0$ ;
- коэффициент внутреннего трения, число,  $\geq 0$ .

Перечень выходных данных:

- касательные и нормальные напряжения критически напряженных трещин.

### 3 Расчетный модуль для численного решения 3D задачи геомеханического моделирования

#### 3.1 Создание базовой геомеханической сетки

Входные данные (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- наименование *Базовой геомеханической сетки*, строка, -, согласно правилам наименования элементов проекта;
- граничная сетка, *Граничная сетка*, -, -;
- ограничение сверху, число или поверхность, м, >0 или поверхность из Проекта (если выбран способ построения каркас);
- ограничение снизу, число или поверхность, м, >0 или поверхность из Проекта (если выбран способ построения каркас);
- начало координат по X, число, м, -. (если выбран способ построения каркас);
- начало координат по Y, число, м, -. (если выбран способ построения каркас);
- длина сети вдоль оси X, число, м, >0. (если выбран способ построения каркас);
- длина сети вдоль оси Y, число, м, >0. (если выбран способ построения каркас);
- угол поворота сети, число, град., 0-359. (если выбран способ построения каркас);
- размер ячейки по оси X, число, м, >0. (если выбран способ построения каркас);
- размер ячейки по оси Y, число, м, >0. (если выбран способ построения каркас);
- список поверхностей в стратиграфическом порядке, список поверхностей, -, - (если выбран способ готовых поверхностей).

Перечень выходных данных (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- базовая геомеханическая сетка, *Базовая геомеханическая сетка*, -, -.

### 3.2 Построение геомеханической сетки

Входные данные (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- базовая геомеханическая сетка, *Базовая геомеханическая сетка*, -, -;
- количество генерируемых ячеек, число, шт.,  $>0$ ;
- метод генерации примыкающих ячеек, перечисление, -, {продление на расстояние, умножение на величину};
- толщина *твердой границы*, число, м,  $>0$ ;
- угол вращения геомеханической сетки, число, град., 0-359.

Перечень выходных данных:

- геомеханическая сетка.

### 3.3 Создание материалов

Входные данные (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- модуль Юнга, число, ГПа, -;
- коэффициент Пуассона, число, -, -;
- упругая константа Био, число, -, -;
- плотность, число, г/см<sup>3</sup>, -;
- коэффициент термического линейного расширения, число, К<sup>-1</sup>, -;
- критерии текучести;
- жесткость, число, Н/м, -; (для трещин и разломов);
- прочность, число, МПа, -; (для трещин и разломов);
- концентрация трещин, число, шт/м<sup>2</sup> (для трещин и разломов).

Перечень выходных данных:

- набор материалов.

### 3.4 Заполнение геомеханической сетки материалами

Входные данные (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- список материалов, *Материалы*, -, -;
- координата X, число, м, -;(для задания области);
- координата Y, число, м, -;(для задания области);
- координата Z, число, м, -;(для задания области);
- значение длины по координате X, число, м,  $> 0$ ;(для задания области);
- значение длины по координате Y, число, м,  $> 0$ ;(для задания области);

- значение длины по координате  $Z$ , число,  $m, > 0$ ; (для задания области).

Перечень выходных данных:

- *геомеханическая сетка* с заполненными свойствами.

### 3.5 Задание модели разрывов

Входные данные (наименование, тип данных, единицы измерения, диапазон значений):

- список материалов;
- координата  $X$ , число,  $m, -$ ; (для задания области);
- координата  $Y$ , число,  $m, -$ ; (для задания области);
- координата  $Z$ , число,  $m, -$ ; (для задания области);
- значение длины по координате  $X$ , число,  $m, > 0$ ; (для задания области);
- значение длины по координате  $Y$ , число,  $m, > 0$ ; (для задания области);
- значение длины по координате  $Z$ , число,  $m, > 0$ ; (для задания области).

Перечень выходных данных:

- сетка трещин и разломов.

### 3.6 Задание температур и давлений для геомеханической сетки

Входные данные:

- *Геомеханическая сетка*;
- набор точек с заданным давлением (точка задается следующими параметрами: координаты в пространстве, временная метка);
- набор точек с заданной температурой (точка задается следующими параметрами: координаты в пространстве, временная метка);

Перечень выходных данных:

- временная сетка состояний напряжений породы.

### 3.7 Определение граничных условий для геомеханической сетки

**Метод гравитация/давление.** Метод рассчитывает начальное напряжение путём задания глобального тектонического напряжения и напряжения, вызванного гравитацией. Добавление "твёрдого плато" позволит явно задать граничные условия.

**Метод инициализации.** Метод рассчитывает начальное напряжения путём задания отношения тектонического напряжения и вертикального сжимающего напряжения. Магнитуа вертикального напряжения вычисляется как вертикальная глубина ячейки умноженное на плотность ячейки.

**Метод прямой инициализации.** Начальное напряжение задаётся двумя способами: тензором напряжения или горизонтально-вращательным напряжением.

**Метод деформации.** Начальное напряжение задаётся как деформация на границе плюс гравитация.

Для решения задачи расчетный модуль должен принимать следующие входные данные:

а) для метода гравитация/давление:

- минимальный горизонтальный градиент напряжения, вызванный тектонической нагрузкой;
- дополнительная константа к горизонтальному градиенту напряжения, вызванный тектонической нагрузкой;
- отношение максимального горизонтального градиент напряжения к минимальному горизонтальному градиенту напряжения;
- горизонтальный азимут напряжения.

б) для метода инициализация:

- вертикальное напряжение отклонения;
- отношение минимального горизонтального напряжения к вертикальному напряжению отклонения;
- отношение вертикального максимального горизонтального напряжения к вертикальному напряжению отклонения;
- значение азимута минимального горизонтального напряжения.

в) для метода прямая инициализация (задается двумя способами тензором напряжения или горизонтально-вращательным напряжением):

г) для расчета тензора напряжения:

- $XX$  составляющая суммарного тензора напряжения;
- $YY$  составляющая суммарного тензора напряжения;
- $ZZ$  составляющая суммарного тензора напряжения;
- $XY$  составляющая суммарного тензора напряжения;
- $YZ$  составляющая суммарного тензора напряжения;
- $ZX$  составляющая суммарного тензора напряжения;

д) для расчёта горизонтально-вращательного напряжения:

- $ZZ$  составляющая общего тензора напряжения;
- минимальное суммарное значение градиента горизонтального напряжения;

- максимальное суммарное значение градиента горизонтального напряжения;
- минимальное суммарное значение градиента горизонтального напряжения;
- минимальное суммарное значение напряжения азимута.

е) для метода деформации:

- общая вертикальная глубина, как функция ХХ составляющей суммарной деформации;
- общая вертикальная глубина, как функция YY составляющей суммарной деформации;
- давление, вызванное морской жидкостью с нуля (уровень моря) до верхней части нижележащей модели;
- градиент давления морской жидкости.

Перечень выходных данных:

- граничные условия геомеханической сетки.

### 3.8 Расчет напряженно-деформированного состояния среды

#### 3.8.1 Входные данные

- набор данных (температура, давление);
- набор свойств;
- граничные условия;
- временной шаг;
- сетка свойств;
- данные о разломах и трещинах;
- (опционально) дистанция выклинивания пластов. Задаётся минимальное расстояние между двумя граничащими узлами. При расстоянии меньше этого значения - пласты выклиниваются;
- (опционально) количество шагов приращения нагрузки.

#### 3.8.2 Выходные данные

- сетка расчётных данных приведена в таблице (Таблица 2).

Таблица 2 – Сетка расчетных данных

<b>Наименование</b>
Суммарное смещение по оси X
Суммарное смещение по оси Y
Суммарное смещение по оси Z
Действующее напряжение составляющей XX - тензора
Действующее напряжение составляющей YY- тензора
Действующее напряжение составляющей ZZ - тензора
Действующее напряжение составляющей XY- тензора
Действующее напряжение составляющей YZ - тензора
Действующее напряжение составляющей ZX - тензора
Суммарное напряжение составляющей XX - тензора
Суммарное напряжение составляющей YY- тензора
Суммарное напряжение составляющей ZZ - тензора
Суммарное напряжение составляющей XY- тензора
Суммарное напряжение составляющей YZ - тензора
Суммарное напряжение составляющей ZX - тензора
Суммарная деформация составляющей XX - тензора
Суммарная деформация составляющей YY- тензора
Суммарная деформация составляющей ZZ - тензора
Суммарная деформация составляющей XY- тензора
Суммарная деформация составляющей YZ - тензора
Суммарная деформация составляющей ZX - тензора

### 3.8.3 Общая схема решения

Основной алгоритм состоит из следующих этапов:

- а) разработка карты структуры образца;
- б) определение параметров материала;
- в) задание граничных и начальных условий, массовых сил;

- г) численное решение системы дифференциальных уравнений краевой задачи механики деформируемого твердого тела в динамической постановке конечно-разностным методом;
- д) сохранение результатов на жестком диске;
- е) обработка и визуализация результатов.

Блок-схема работы расчетного блока (РБ) – блока решения краевой задачи – представлена на рисунке (Рисунок 9).

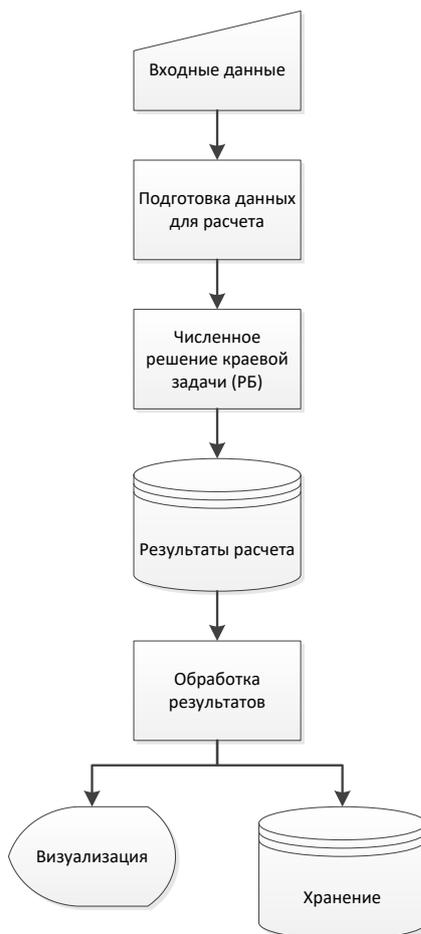


Рисунок 9 – Блок-схема работы комплекса

В расчетном блоке вся система уравнений решается в цикле от начала процесса и до выполнения критерия окончания счета с шагом по времени, рассчитанном из условия устойчивости численной схемы. На каждом временном шаге в цикле обходятся все узлы и ячейки трехмерной расчетной сетки. Решаются уравнения движения, по найденным скоростям рассчитываются новые координаты узлов сетки, затем определяются скорости деформаций и напряжения. Эти процедуры объединены в расчетное ядро (Рисунок 10). В конце из условия устойчивости получается новое значение расчетного шага по времени, и при выполнении условия

продолжения расчет повторяет. Если выполнено условие сохранения промежуточных данных, РБ передает данные процедуре сохранения информации.

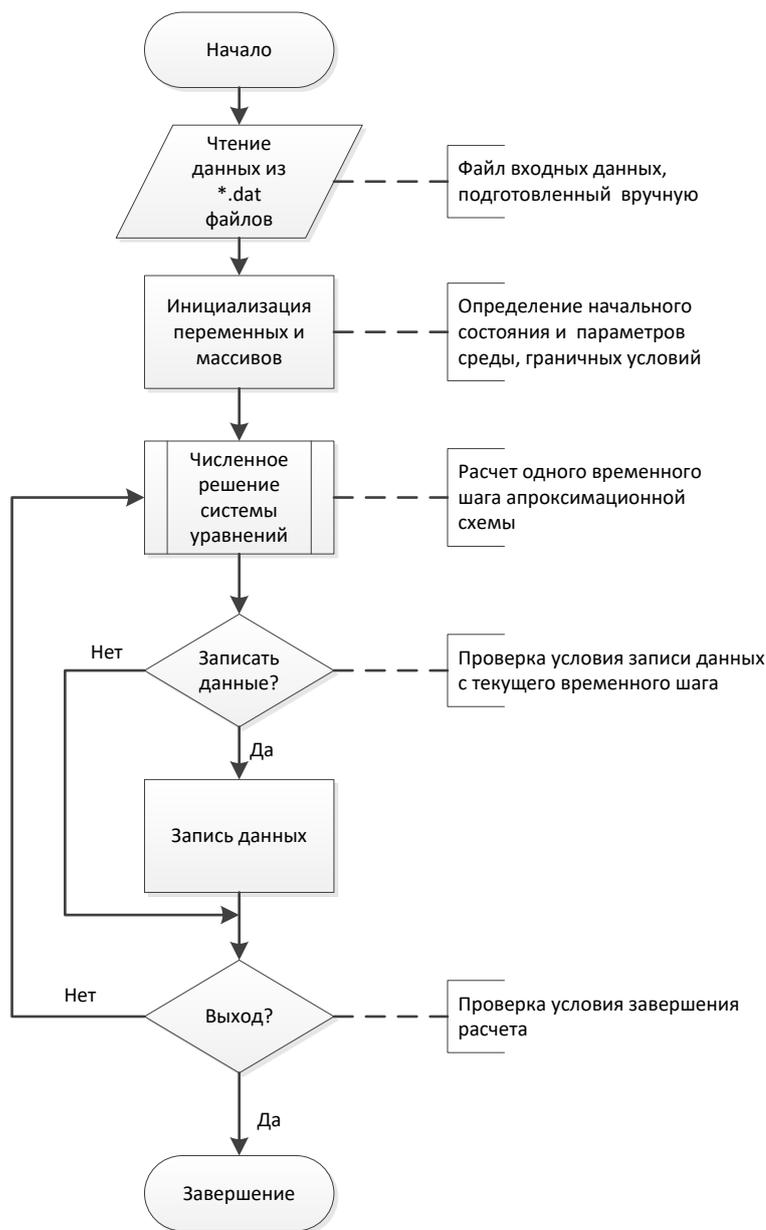


Рисунок 10 – Расчетное ядро

### *Критерий завершения расчета*

Для каждой отдельной задачи важно определить не только начальные и граничные условия, но и критерий завершения расчета. На рисунке (Рисунок 11) – Проверка условия завершения расчета. Этот критерий может быть реализован разными способами: для одних задач это будет общая деформация объекта, для других – достижение некоторого уровня напряжений на границе, время под нагрузкой, начало разрушения и т.д. В случае решения задачи о нахождении напряжений в слое геосреды со структурой под действием массовых сил – силы

тяжести – необходимо, чтобы был выполнен критерий установления, т.е. когда в результате плавного роста силы тяжести среда достигнет статического состояния – остаточные колебания в среде достигнут некоторого заданного минимального уровня.

Представленная ниже конечно-разностная схема в программе реализована в виде отдельного счетного ядра, блок-схема которого представлена на рисунке (Рисунок 11).

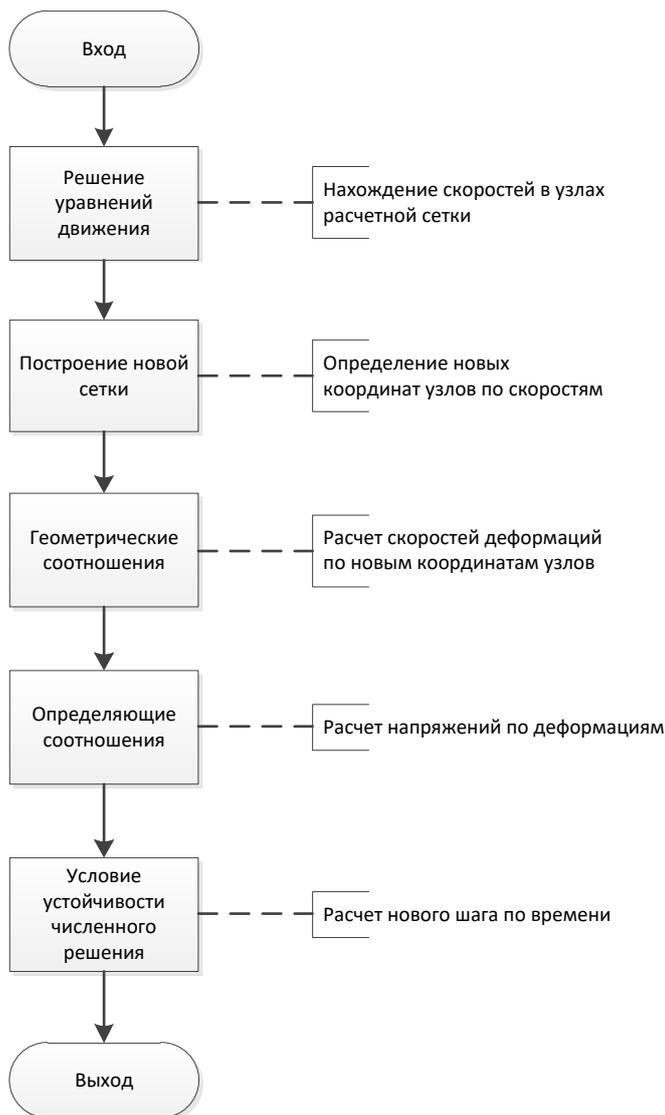


Рисунок 11 – Расчетное ядро

### 3.8.4 Расчетная конечно-разностная 3D схема

#### 3.8.4.1 Дискретизация среды

Физическая область разбивается на ячейки, определяемые восемью вершинами. Сетка  $(i,j,k)$  движется вместе материалом, и массы ячеек остаются постоянными. Верхние индексы означают номер шага по времени, нижние – по пространству.

С каждой из восьми вершин ( $g$ ) ассоциируется тройка векторов, как показано на рисунке (Рисунок 12).

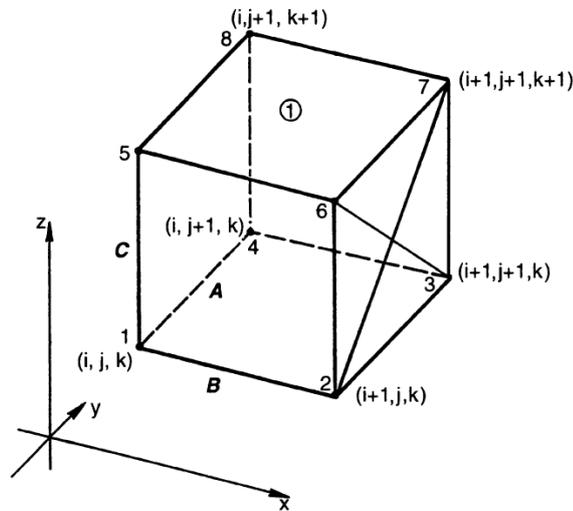
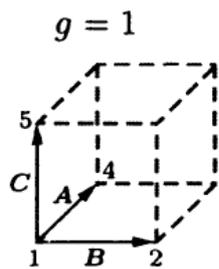


Рисунок 12 – Схема нумерации сетки



$$A : (a_i)_1 = x_4 - x_1; (a_j)_1 = y_4 - y_1; (a_k)_1 = z_4 - z_1.$$

$$B : (b_i)_1 = x_2 - x_1; (b_j)_1 = y_2 - y_1; (b_k)_1 = z_2 - z_1.$$

$$C : (c_i)_1 = x_5 - x_1; (c_j)_1 = y_5 - y_1; (c_k)_1 = z_5 - z_1.$$

По аналогии записываются тройки векторов для всех восьми вершин.

**Объем ячейки** ① рассчитаем следующим образом:

$$v_{(1)} = \frac{1}{8} \sum_{g=1}^8 [B \times A \cdot C] \quad (48)$$

$$[B \times A \cdot C]_{g=1}^n = \begin{vmatrix} b_i & b_j & b_k \\ a_i & a_j & a_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix}$$

$$= [b_i(a_j c_k - a_k c_j) - b_j(a_i c_k - a_k c_i) + b_k(a_i c_j - a_j c_i)]_{g=1}^n$$

Последняя операция повторяется для остальных  $g = 2 \rightarrow 8$ . Таким образом, объем ячейки рассчитывается как среднее арифметическое от восьми объемов параллелепипедов, построенных на восьми тройках векторов.

**Масса ячейки (49):**

$$M_{(1)} = \left[ \frac{\rho_0}{V^0} v^0 \right]_{(1)} \quad (49)$$

где  $\rho_0$  – начальная плотность,

$V_0$  – начальный относительный объем;

$v_0$  – реальный объем, рассчитанный из координат в момент времени.

**Масса узла  $(i,j,k)$  (50):**

$$(\Phi)_{i,j,k} = \frac{1}{8} [M_{(1)} + M_{(2)} + M_{(3)} + M_{(4)} + M_{(5)} + M_{(6)} + M_{(7)} + M_{(8)}] \quad (50)$$

#### 3.8.4.2 Уравнение движения

Приведем уравнения движения для узла  $(i,j,k)$  на рисунке (Рисунок 13).

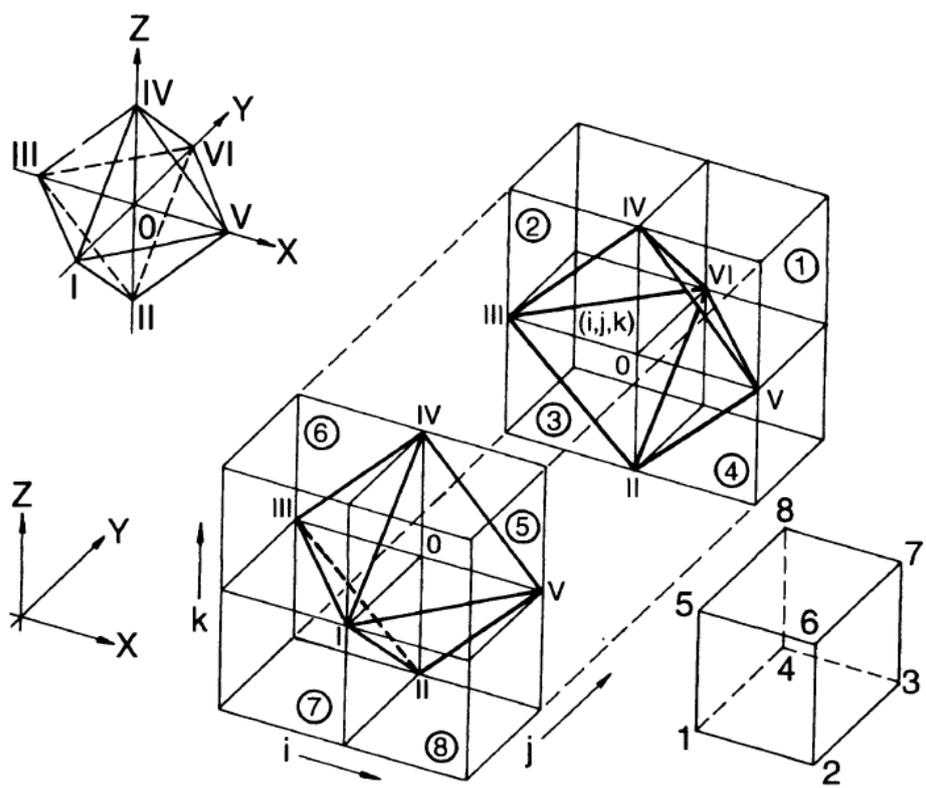


Рисунок 13 – Расчетный шаблон для узла  $(i,j,k)$

Движение вдоль оси X (51):

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{\rho_{i,j,k}^n} \left[ \frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} \right]_{i,j,k(1)}^n \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial x} \right)_{i,j,k}^n \\
&= \frac{1}{4\Phi_{i,j,k}} \left\{ (\Sigma_{xx})_{\textcircled{1}} [(y_{VI} - y_V)(z_{IV} - z_V) - (z_{VI} - z_V)(y_{IV} - y_V)] \right. \\
&\quad + (\Sigma_{xx})_{\textcircled{4}} [(y_{II} - y_V)(z_{VI} - z_V) - (z_{II} - z_V)(y_{VI} - y_V)] \\
&\quad + (\Sigma_{xx})_{\textcircled{2}} [(y_{IV} - y_{III})(z_{VI} - z_{III}) - (z_{IV} - z_{III})(y_{VI} - y_{III})] \\
&\quad + (\Sigma_{xx})_{\textcircled{3}} [(y_{VI} - y_{III})(z_{II} - z_{III}) - (z_{VI} - z_{III})(y_{II} - y_{III})] \\
&\quad + (\Sigma_{xx})_{\textcircled{5}} [(y_V - y_I)(z_{IV} - z_I) - (z_V - z_I)(y_{IV} - y_I)] \\
&\quad + (\Sigma_{xx})_{\textcircled{8}} [(y_{II} - y_I)(z_V - z_I) - (z_{II} - z_I)(y_V - y_I)] \\
&\quad + (\Sigma_{xx})_{\textcircled{6}} [(y_I - y_{III})(z_{IV} - z_{III}) - (z_I - z_{III})(y_{IV} - y_{III})] \\
&\quad \left. + (\Sigma_{xx})_{\textcircled{7}} [(y_{II} - y_{III})(z_I - z_{III}) - (z_{II} - z_{III})(y_I - y_{III})] \right\}_{i,j,k}^n.
\end{aligned}$$

Чтобы записать выражение для  $(\frac{1}{\rho} \partial T_{xy} / \partial y)_{i,j,k}^n$ , надо заменить  $\Sigma_{xx}$  в правой части приведенного выражения на  $T_{xy}$ ,  $y$  на  $z$ , и  $z$  на  $x$ .

Чтобы записать выражение для  $(\frac{1}{\rho} \partial T_{zx} / \partial z)_{i,j,k}^n$ , надо заменить  $\Sigma_{xx}$  в правой части приведенного выражения на  $T_{zx}$ ,  $y$  на  $x$ , и  $z$  на  $y$ .

Скорость в направлении оси  $X$  в моменты времени  $n+1/2$  и координаты узла в моменты времени  $n+1$  и  $n+1/2$  будут:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{i,j,k}^{n+1/2} &= \dot{x}_{i,j,k}^{n-1/2} + \left( \frac{d\dot{x}}{dt} \right)_{i,j,k}^n \Delta t^n, \\
x_{i,j,k}^{n+1} &= x_{i,j,k}^n + \dot{x}_{i,j,k} \Delta t^{n+1/2}, \\
x_{i,j,k}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} (x_{i,j,k}^{n+1} + x_{i,j,k}^n).
\end{aligned}$$

**Движение вдоль оси  $Y$  (52):**

$$\left( \frac{dy}{dt} \right)_{i,j,k}^n = \frac{1}{\rho_{i,j,k}^n} \left[ \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \right]_{i,j,k}^n \quad (52)$$

где в соответствующих членах для скорости вдоль  $X$  необходимо провести следующие замены:

для  $(\frac{1}{\rho} \partial T_{xy} / \partial x)_{i,j,k}^n$ , надо заменить  $\Sigma_{xx}$  в выражении выше на  $T_{xy}$ ,

для  $(\frac{1}{\rho} \partial \Sigma_{yy} / \partial y)_{i,j,k}^n$ , надо заменить  $T_{xy}$  в выражении выше на  $\Sigma_{yy}$ ,

для  $(\frac{1}{\rho} \partial T_{yz} / \partial z)_{i,j,k}^n$ , надо заменить  $T_{zx}$  в выражении выше на  $T_{yz}$ .

**Движение вдоль оси Z (53):**

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{i,j,k}^n = \frac{1}{\rho_{i,j,k}^n} \left[ \frac{\partial T_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Sigma_{zz}}{\partial z} \right]_{i,j,k}^n \quad (53)$$

где в соответствующих членах для скорости вдоль X необходимо провести следующие замены:

для  $(\frac{1}{\rho} \partial T_{zx} / \partial x)_{i,j,k}^n$ , надо заменить  $\Sigma_{xx}$  в выражении выше на  $T_{zx}$ ,

для  $(\frac{1}{\rho} \partial T_{yz} / \partial y)_{i,j,k}^n$ , надо заменить  $T_{xy}$  в выражении выше на  $T_{yz}$ ,

для  $(\frac{1}{\rho} \partial \Sigma_{zz} / \partial z)_{i,j,k}^n$ , надо заменить  $T_{zx}$  в выражении выше на  $\Sigma_{zz}$ .

**3.8.4.3 Сохранение масс (54):**

$$V_{(1)}^n = \left(\frac{\rho_0}{M}\right)_{(1)} v_{(1)}^n \quad (54)$$

где  $v_{(1)}^n$  объем в момент времени t=n,

$V_{(1)}^n$  – относительный объем.

Аналогично (55):

$$V_{(1)}^{n+1} = \left(\frac{\rho_0}{M}\right)_{(1)} v_{(1)}^{n+1} \quad (55)$$

объем и относительный объем в момент времени n+1.

Выражение для относительного объема в момент времени t=n+1/2 (56):

$$V_{(1)}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (V_{(1)}^{n+1} + V_{(1)}^n) \quad (56)$$

**Расчет конечных деформаций:**

Конечно-разностный оператор для расчета поверхностного интеграла области <sup>①</sup> на рисунке (см. Рисунок 13) разбивает поверхность на треугольники. Скорость

треугольника равна среднему значению скоростей вершин треугольника. Векторы площади (векторы, по модулю равные площади треугольника) рассчитываются так, чтобы они были направлены наружу объема. Скалярное произведение вектора площади и вектора направления, помноженное на среднюю скорость, дает скорость потока через поверхность в данном направлении. Конечно-разностные уравнения для расчета  $\partial \dot{x} / \partial x$ ,  $\partial \dot{x} / \partial y$  и  $\partial \dot{x} / \partial z$  приведены выше.

Остальные производные скорости, требуемые для расчета компонент деформаций, рассчитываются посредством замены  $\dot{x}$  на  $\dot{y}$  и  $\dot{z}$ , чтобы заполнить матрицу:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \end{vmatrix}$$

**Производные скорости (57):**

$$\left(\frac{d\dot{x}}{dx}\right)_{(1)}^{n+1/2} = \left(\frac{1}{12v_{(1)}^{n+1/2}}\right) \sum_{g=1}^8 [x_{AB}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{i} + x_{CA}(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{i} + x_{BC}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{i}]_g^{n+1/2} \quad (57)$$

где

$$\begin{aligned}
(\dot{x}_{AB})_{g=1} &= (\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_4), \\
(\dot{x}_{CA})_{g=1} &= (\dot{x}_1 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5), \\
(\dot{x}_{BC})_{g=1} &= (\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_5).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{i})_{g=1} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}_{g=1} = [(a_j b_k - a_k b_j)]_{g=1}. \\
(\mathbf{C} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{i})_{g=1} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_i & c_j & c_k \\ a_i & a_j & a_k \end{vmatrix}_{g=1} = [(c_j a_k - c_k a_j)]_{g=1}. \\
(\mathbf{B} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{i})_{g=1} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix}_{g=1} = [(b_j c_k - b_k c_j)]_{g=1}.
\end{aligned}$$

Приведенные шаги, записанные для  $g = 1$ , необходимо повторить для  $g = 2 \rightarrow 8$  (58):

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(1)}^{n+1/2} = \left(\frac{1}{12v_{(1)}^{n+1/2}}\right) \sum_{g=1}^8 [x_{AB}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{j} + x_{CA}(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{j} + x_{BC}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{j}]_{g=1}^{n+1/2} \quad (58)$$

где  $(\dot{x}_{AB})_{g=1}$ ,  $(\dot{x}_{CA})_{g=1}$  и  $(\dot{x}_{BC})_{g=1}$  определены выше.

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{j})_{g=1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}_{g=1} = [-(a_i b_k - a_k b_i)]_{g=1}.$$

$$(\mathbf{C} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{j})_{g=1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_i & c_j & c_k \\ a_i & a_j & a_k \end{vmatrix}_{g=1} = [-(c_i a_k - c_k a_i)]_{g=1}.$$

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{j})_{g=1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix}_{g=1} = [-(b_i c_k - b_k c_i)]_{g=1}.$$

Приведенные шаги, записанные для  $g = 1$ , необходимо повторить для  $g = 2 \rightarrow 8$  (59):

$$\left(\frac{d\dot{x}}{dz}\right)_{(1)}^{n+1/2} = \left(\frac{1}{12v_{(1)}^{n+1/2}}\right) \sum_{g=1}^8 [\dot{x}_{AB}(A \times B) \cdot \mathbf{k} + \dot{x}_{CA}(C \times A) \cdot \mathbf{k} + \dot{x}_{BC}(\dot{B} \times C) \cdot \mathbf{k}]_g^{n+1/2} \quad (59)$$

где  $(\dot{x}_{AB})_{g=1}$ ,  $(\dot{x}_{CA})_{g=1}$  и  $(\dot{x}_{BC})_{g=1}$  определены выше.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{k})_{g=1} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}_{g=1} = [(a_i b_j - a_j b_i)]_{g=1}. \\ (\mathbf{C} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{k})_{g=1} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c_i & c_j & c_k \\ a_i & a_j & a_k \end{vmatrix}_{g=1} = [(c_i a_j - c_j a_i)]_{g=1}. \\ (\mathbf{B} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{k})_{g=1} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix}_{g=1} = [(b_i c_j - b_j c_i)]_{g=1}. \end{aligned}$$

Приведенные шаги, записанные для  $g = 1$ , необходимо повторить для  $g = 2 \rightarrow 8$ .

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = \text{так же, как и } \partial \dot{x} / \partial x \text{ с заменой } \dot{x} \text{ на } \dot{y},$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial x} = \text{так же, как и } \partial \dot{x} / \partial x \text{ с заменой } \dot{x} \text{ на } \dot{z},$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = \text{так же, как и } \partial \dot{x} / \partial y \text{ с заменой } \dot{x} \text{ на } \dot{y},$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial y} = \text{так же, как и } \partial \dot{x} / \partial y \text{ с заменой } \dot{x} \text{ на } \dot{z},$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial z} = \text{так же, как и } \partial \dot{x} / \partial z \text{ с заменой } \dot{x} \text{ на } \dot{y},$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = \text{так же, как и } \partial \dot{x} / \partial z \text{ с заменой } \dot{x} \text{ на } \dot{z}.$$

### Приращения деформаций:

$$\begin{aligned}(\Delta\varepsilon_{xx})_{\textcircled{1}}^{n+1/2} &= \left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}\right)_{\textcircled{1}}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2}, \\(\Delta\varepsilon_{yy})_{\textcircled{1}}^{n+1/2} &= \left(\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}\right)_{\textcircled{1}}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2}, \\(\Delta\varepsilon_{zz})_{\textcircled{1}}^{n+1/2} &= \left(\frac{\partial\dot{z}}{\partial z}\right)_{\textcircled{1}}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2}, \\(\Delta\varepsilon_{xy})_{\textcircled{1}}^{n+1/2} &= \left[\left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial y}\right)_{\textcircled{1}}^{n+1/2} + \left(\frac{\partial\dot{y}}{\partial x}\right)_{\textcircled{1}}^{n+1/2}\right] \Delta t^{n+1/2}, \\(\Delta\varepsilon_{yz})_{\textcircled{1}}^{n+1/2} &= \left[\left(\frac{\partial\dot{y}}{\partial z}\right)_{\textcircled{1}}^{n+1/2} + \left(\frac{\partial\dot{z}}{\partial y}\right)_{\textcircled{1}}^{n+1/2}\right] \Delta t^{n+1/2}, \\(\Delta\varepsilon_{zx})_{\textcircled{1}}^{n+1/2} &= \left[\left(\frac{\partial\dot{z}}{\partial x}\right)_{\textcircled{1}}^{n+1/2} + \left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial z}\right)_{\textcircled{1}}^{n+1/2}\right] \Delta t^{n+1/2}, \\ \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_{\textcircled{1}}^{n+1/2} &= (\Delta\varepsilon_{xx})_{\textcircled{1}}^{n+1/2} + (\Delta\varepsilon_{yy})_{\textcircled{1}}^{n+1/2} + (\Delta\varepsilon_{zz})_{\textcircled{1}}^{n+1/2}.\end{aligned}$$

## Расчет напряжений

### Девiator напряжений

$$\begin{aligned}(s_{xx})_{\textcircled{1}}^{n+1} &= (s_{xx})_{\textcircled{1}}^n + 2\mu \left[ (\Delta\varepsilon_{xx})_{\textcircled{1}}^{n+1/2} - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta V}{V} \right)_{\textcircled{1}}^{n+1/2} \right] + (\delta_{xx}^n)_{\textcircled{1}}, \\(s_{yy})_{\textcircled{1}}^{n+1} &= (s_{yy})_{\textcircled{1}}^n + 2\mu \left[ (\Delta\varepsilon_{yy})_{\textcircled{1}}^{n+1/2} - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta V}{V} \right)_{\textcircled{1}}^{n+1/2} \right] + (\delta_{yy}^n)_{\textcircled{1}}, \\(s_{zz})_{\textcircled{1}}^{n+1} &= (s_{zz})_{\textcircled{1}}^n + 2\mu \left[ (\Delta\varepsilon_{zz})_{\textcircled{1}}^{n+1/2} - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta V}{V} \right)_{\textcircled{1}}^{n+1/2} \right] + (\delta_{zz}^n)_{\textcircled{1}}, \\(T_{xy})_{\textcircled{1}}^{n+1} &= (T_{xy})_{\textcircled{1}}^n + \mu (\Delta\varepsilon_{xy})_{\textcircled{1}}^{n+1/2} + (\delta_{xy}^n)_{\textcircled{1}}, \\(T_{yz})_{\textcircled{1}}^{n+1} &= (T_{yz})_{\textcircled{1}}^n + \mu (\Delta\varepsilon_{yz})_{\textcircled{1}}^{n+1/2} + (\delta_{yz}^n)_{\textcircled{1}}, \\(T_{zx})_{\textcircled{1}}^{n+1} &= (T_{zx})_{\textcircled{1}}^n + \mu (\Delta\varepsilon_{zx})_{\textcircled{1}}^{n+1/2} + (\delta_{zx}^n)_{\textcircled{1}}.\end{aligned}$$

Поправка на поворот сетки:

$$\begin{aligned}\delta_{xx}^n &= -2\omega_z^n T_{xy}^n + 2\omega_y^n T_{zx}^n, \\ \delta_{yy}^n &= +2\omega_z^n T_{xy}^n - 2\omega_x^n T_{yz}^n, \\ \delta_{zz}^n &= +2\omega_x^n T_{yz}^n - 2\omega_y^n T_{zx}^n = -\delta_{yy}^n - \delta_{xx}^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{xy}^n &= \omega_z^n (s_{xx}^n - s_{yy}^n) + \omega_y^n T_{yz}^n - \omega_x^n T_{zx}^n, \\ \delta_{yz}^n &= \omega_x^n (s_{yy}^n - s_{zz}^n) + \omega_z^n T_{zx}^n - \omega_y^n T_{xy}^n, \\ \delta_{zx}^n &= \omega_y^n (s_{zz}^n - s_{xx}^n) + \omega_x^n T_{xy}^n - \omega_z^n T_{yz}^n,\end{aligned}$$

где

$$\omega_x^n = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} \right) \Delta t^{n+1/2},$$

$$\omega_y^n = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} \right) \Delta t^{n+1/2},$$

$$\omega_z^n = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \right) \Delta t^{n+1/2}.$$

$$(\Sigma_{xx})_{\text{①}}^{n+1} = -(P_{\text{①}}^{n+1} + q_{\text{①}}^{n+1/2}) + (s_{xx})_{\text{①}}^{n+1},$$

$$(\Sigma_{yy})_{\text{①}}^{n+1} = -(P_{\text{①}}^{n+1} + q_{\text{①}}^{n+1/2}) + (s_{yy})_{\text{①}}^{n+1},$$

$$(\Sigma_{zz})_{\text{①}}^{n+1} = -(P_{\text{①}}^{n+1} + q_{\text{①}}^{n+1/2}) + (s_{zz})_{\text{①}}^{n+1}.$$

где давление  $P^{n+1} = P^n + K \frac{\Delta V}{V}$ .

### Граничные условия

В представленной конечно-разностной схеме возможно задание двух типов граничных условий:

- кинематических;
- динамических.

В первом случае задаются скорости в узлах, принадлежащих границе.

Во втором – во внешних ячейках (т.н. фиктивных ячейках, нулевой слой), окружающих расчетную область, задается необходимый уровень давления, а скорости граничных узлов рассчитываются по тому же шаблону, что и скорости внутренних узлов.

*Частные случаи ГУ.* Если необходимо задать свободную границу, то массы и напряжения в фиктивных ячейках обнуляются, а для узла на свободной границе рассчитываются все три компоненты вектора скорости. Отражающие граничные условия, или условия симметрии, получаются, если нормальные скорости на границе равны нулю, а скорости вдоль границы рассчитываются как в случае свободной границы.

### 3.8.5 Распараллеливание расчетного алгоритма

Для распараллеливания алгоритма была использована библиотека MPI, которая в настоящее время является наиболее распространенной технологией программирования параллельных компьютеров с распределенной памятью. Основным способом взаимодействия параллельных процессов в таких системах

является передача сообщений друг другу, что и отражено в названии данной технологии – Message Passing Interface.

MPI-программа – это множество параллельных взаимодействующих процессов. Все процессы порождаются один раз, образуя параллельную часть программы. В ходе выполнения MPI-программы порождение дополнительных процессов или уничтожение существующих не допускается. Каждый процесс работает в своем адресном пространстве, никаких общих переменных или данных в MPI нет. Основным способом взаимодействия между процессами является явная посылка сообщений.

Краевые задачи – класс задач, для которых достаточно хорошо разработана технология параллельного программирования. В этом случае используется техника декомпозиции по процессорам расчетной области, как правило, с перекрытием подобластей. На рисунке (Рисунок 14) представлено такое разложение исходной расчетной области на 4 процессора с топологией одномерной сетки. Заштрихованные области на каждом процессоре обозначают те точки, в которых расчет производится из данных, переданных от соседней области. Фактически в данном случае реализуется расчет с кинематическими граничными условиями. Между областями передаются значения скоростей в слое, а локально в заштрихованном слое рассчитываются деформации и напряжения.

На рисунке (Рисунок 14) представлена одномерная декомпозиция, когда глобальная расчетная область разбивается на слои вдоль одной оси координат, в общем случае для трехмерной задачи можно реализовать и двух- и трехмерную декомпозицию.

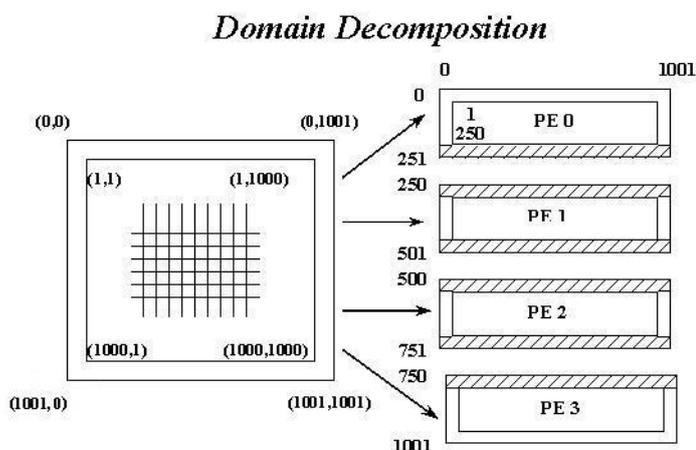


Рисунок 14 – Одномерная декомпозиция

### 3.9 Ремасштабирование (Upscaling)

Входные данные:

- исходная сетка;
- результирующая сетка;
- наименование свойства;
- алгоритм для upscaling;
- метод осреднения.

Выходные данные:

- распределение свойств на укрупненной сетке.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был проведен необходимый комплекс исследований для разработки и математического обоснования высокоточных вычислительных методов для численного решения 1D и 3D задач геомеханического моделирования.

В результате работ по первой части настоящего отчета о НИР выявлено, что существующие программные системы по отдельности не решают поставленные геомеханические задачи в полной мере. Такие задачи возможно решить только, используя связку из программ, что приводит к значительным временным задержкам при потоковой работе и трудностям анализа результатов. Показаны наиболее представительные программные средства с точки зрения функциональности.

Предложено разбиение процесса решения геомеханической задачи на отдельные расчетные процедуры для одномерной и трехмерной постановок, приведены их математические обоснования, входные и выходные данные. Была показана неоднозначность решения задач, и предложен наиболее полный относительно применительной практики набор вариантов их достижения. В частности, были предложены детерминистический и стохастический методы решения задачи расчета упруго-прочностных свойств в одномерной постановке и распространения свойств горной породы в трехмерном пространстве.

При описании алгоритмов и особенностей их реализации в программной системе были проанализированы возможности оптимизации и распараллеливания наиболее ресурсоемких из них. Так показано, что основным способом распараллеливания одномерных и трехмерных задач является одновременный расчет по пространственному признаку. Для одномерных задач таким признаком является интервал глубины, а для трехмерных – перекрывающиеся области расчетной сетки.

Стоит отметить, что в работе предложен высокоточный численный метод решения задачи трехмерного геомеханического моделирования с учетом трещин и разломов, а также выделены особенности математической постановки задач расчета упруго-прочностных свойств и моделирования напряженно-деформированного состояния среды для различных типов горной породы, включая традиционные и нетрадиционные коллекторы.

Результаты настоящего отчета о НИР рекомендуется использовать для создания технического задания на разработку расчетного модуля для численного решения 1D и 3D задач геомеханического моделирования. На основе алгоритмов,

предложенных в третьей части отчета о НИР, рекомендуется создать программное средство, соответствующее такому техническому заданию.

Исходя из анализа мирового опыта и современных экономических условий внедрение результатов работы позволит повысить независимость российского энергетического сектора от зарубежных технологий геомеханического моделирования нефтегазовых месторождений.

Поскольку работа выполнена на основе анализа лучших теоретических и прикладных достижений в области геомеханического моделирования, то научно-технический уровень выполненной НИР можно оценить, как соответствующий таким достижениям. В частности, внедрение НИР позволит создать программную систему, решающую полномасштабную трехмерную геомеханическую задачу на уровне связки программных средств JewelSuite и Abaqus.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Geoffrey H. Ball, David J. Hall A clustering technique for summarizing multivariate data // Behavioral Science. 1967. №12. p. 153–155.
- 2 Hidetomo Ichihashi, Sadaaki Miyamoto, Katsuhiro Honda. Algorithms for Fuzzy Clustering, 2008.
- 3 Junjie Wu. Advances in K-means Clustering: A Data Mining Thinking, 2012.
- 4 Demster, A. Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm /A.P. Demster, N.M. Laird, D.B. Rubin //JOURNAL OF THE ROYAL STATISTICAL SOCIETY, SERIES B, Vol. 39, No. 1, 1977. -С.1-38.
- 5 Загоруйко Н. Г. Прикладные методы анализа данных и знаний.— Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999.
- 6 Загоруйко Н. Г., Ёлкина В. Н., Лбов Г. С. Алгоритмы обнаружения эмпирических закономерностей. — Новосибирск: Наука, 1985.
- 7 Мандель И. Д. Кластерный анализ. — М.: Финансы и Статистика, 1988.
- 8 Уиллиамс У. Т., Ланс Д. Н. Методы иерархической классификации // Статистические методы для ЭВМ / Под ред. М. Б. Малютов. — М.: Наука, 1986.— С. 269–301.
- 9 Lance G. N., Willams W. T. A general theory of classification sorting strategies. 1. hierarchical systems // Comp. J.— 1967.— no. 9.— Pp. 373–380.
- 10 F. T. Leighton. Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes. Morgan Kaufmann, 1991.
- 11 X. Li and Z. Fang. Parallel clustering algorithms. Parallel Computing, 11:275 - 290, 1989.
- 12 Julian Brooke and Graeme Hirst. Paragraph Clustering for Intrinsic Plagiarism Detection using a Stylistic Vector-Space Model with Extrinsic Features, 2012.
- 13 Julian Brooke et al. Unsupervised Stylistic Segmentation of Poetry with Change Curves and Extrinsic Features, 2012.
- 14 К. Эсбенсен. Анализ многомерных данных, сокр. пер. с англ. под ред. О. Родионовой, Из-во ИПХФ РАН, 2005 [К.Н. Esbensen. Multivariate Data Analysis - In Practice 4-th Ed., СМО, 2000].
- 15 J.A. Nelder and R. Mead, Computer Journal, 1965, vol 7, pp 308—313.

16 Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. — М.: Наука, 1973. — 576 с.